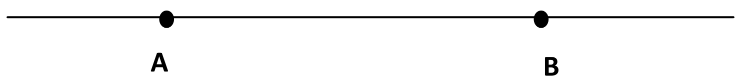
SEGMENTOS RECTILÍNEOS: DIRIGIDOS Y NO DIRIGIDOS

A la porción de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos se llama *segmento rectilíneo* o simplemente *segmento*. Los dos puntos se llaman extremos del segmento y se consideran parte de este.



Así en la figura, para la recta *l*, **AB** es un segmento cuyos extremos son los puntos **A** y **B**.

En algunas ocasiones será importante tener en cuenta el sentido de un segmento rectilíneo. Por ejemplo, en nuestra figura, podemos considerar dos tipos de segmentos: un segmento dirigido o un segmento no dirigido.

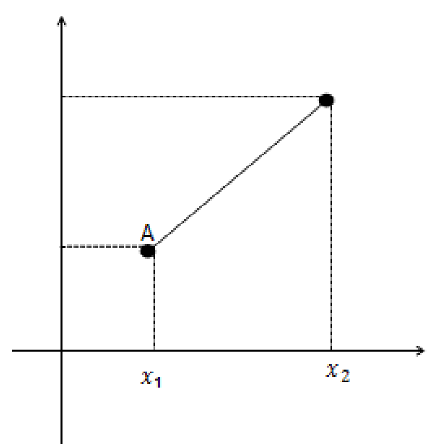
Un *segmento dirigido* es aquel al que se le x. Así diremos que el segmento **AB** está dirigido de **A** a **B**, indicando primero al punto **A** llamado origen o punto inicial y luego al punto **B** llamado extremo o punto final. Se puede obtener el mismo segmento, pero ahora dirigiéndolo de **B** a **A**; y entonces **B** será el origen y **A** el punto final, su notación estaría dada por **BA**. O sea que para indicar el sentido de un segmento dirigido se escribe primero el origen o punto inicial y luego su extremo o punto final.

A pesar de que las longitudes de los segmentos dirigidos **AB** y **BA** son iguales, será necesario especificar que si un segmento dirigido en un sentido es considerado positivo; entonces ese mismo segmento en sentido contrario será negativo, lo que podemos expresar como:

AB= -**BA**

Si consideramos que el segmento **AB** tiene sentido positivo.

Un *segmento no dirigido* es aquel al que no se le considera un sentido y debido a esto se puede expresar en cualquier orden. Esto es, un segmento no dirigido siempre se le considera como positivo cualquiera que sea su sentido, por lo que se puede expresar de la siguiente manera:



AB= **BA**
Si el segmento **AB** se considera no dirigido.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DEL PLANO

La distancia entre dos puntos ubicados en un sistema coordenado rectangular se determina por la longitud del segmento que los une. Supongamos que $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos situados en el plano como se muestran en la figura:

La distancia que hay entre estos dos puntos es la longitud del segmento que los une y se determina a través da la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$$

La distancia entre dos puntos algunas veces la denotaremos mediante la letra d minúscula y otras veces mediante la expresión $d(A, B)$, donde se indican entre paréntesis los puntos a los cuales se les calcula su distancia. Esta notación es ideal cuando se involucran cálculos de distancias entre otros puntos en un mismo plano.

Ejemplo:

Calcule la distancia entre los siguientes puntos del plano $A(-1, -3)$ y $B(-5,6)$.

Solución:

Antes de utilizar la fórmula, se recomienda etiquetar las coordenadas de los puntos de la siguiente manera, esto con el fin de evitar confusiones en la sustitución:

A(x_1, y_1) B(x_2, y_2)

O bien:

$\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$

Datos:

$\boldsymbol{A(-1, -3)}$ **y** $\boldsymbol{B(-5, 6)}$

X_1= -1 Y_1= -3 X_2= -5 Y_2= 6

Fórmula:

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$$

Sustitución:

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(-\mathbf{5} - (-\mathbf{1}))^2 + (\mathbf{6} - (-\mathbf{3}))^2}$$

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(-\mathbf{5} + \mathbf{1})^2 + (\mathbf{6} + \mathbf{3})^2}$$

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(-\mathbf{4})^2 + (\mathbf{9})^2}$$

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{\mathbf{16} + \mathbf{81}}$$

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{\mathbf{97}}$$

$$\boldsymbol{d} = \mathbf{9.84}$$

Resultado:

$$\boldsymbol{d} = \mathbf{9.84}$$

NOTA:

Las coordenadas también se hubieran podido enmarcar como $A(-1,-3)$ y $B(-5,6)$, hacer la sustitución en este orden y el resultado no se alteraría. Se te invita a verificarlo. Además se te sugiere utilizar papel milimetrado para comprobar gráficamente el resultado.

PERÍMETRO Y ÁREA DE UN TRIÁNGULO EN EL PLANO

Perímetro: Para calcular el perímetro de un triángulo en el plano cartesiano bastará con conocer las coordenadas de sus vértices. Así aplicando la fórmula para determinar la distancia entre dos puntos, se calculan las longitudes de cada uno de los lados del triángulo; luego el perímetro se obtiene sumando esas longitudes.

Área: Para encontrar el área de un triángulo trazado en un sistema coordenado rectangular, emplearemos la *Fórmula de Herón*; ya que esta fórmula está dada en términos del perímetro y las longitudes de los lados del triángulo. Esta fórmula es muy práctica y no requiere conocer el valor de alguna de las alturas del triángulo. La fórmula está dada mediante la siguiente expresión:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

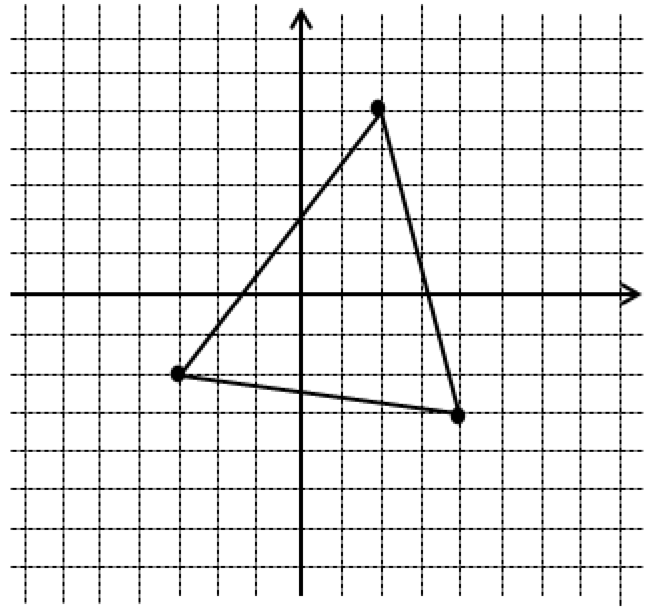
donde A : representa el área del triangulo
a, b, c : son las longitudes de los lados; y
s : es la mitad del valor de su perímetro, esto es:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Ejemplo: Calcular el perímetro y área de un triángulo cuyos vértices se encuentran en los siguientes puntos del plano coordenado: $A(2,5)$, $B(4,-3)$ y $C(-3,-2)$. (Véase dibujo)

Solución:

Calculemos las longitudes de cada uno de los lados del triángulo:



$x_1, y_1 x_2, y_2$

a) Primero del punto $A(2\ ,5)$ al $B(4\ ,-3)$,

$$d(A,B) = \sqrt{(4-2)^2 + (-3-5)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(2)^2 + (-8)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{4+64}$$

$$d(A,B) = \sqrt{68} = 8.24$$

$x_1, y_1 x_2\ , y_2$

b) Del punto $B(4\ ,-3)$ al punto $C(-3,-2)$

$$d(B,C) = \sqrt{(-3-4)^2 + (-2-(-3))^2}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(-7)^2 + (-2+3)^2}$$

$$d(B,C) = \sqrt{49 + (1)^2}$$

$$d(B,C) = \sqrt{50} = 7.07$$

$x_1, y_1 x_2, y_2$

c) Finalmente del punto $C(-3,-2)$ al punto $A(2\ \ ,\ \ 5)$

$$d(C,A) = \sqrt{(2-(-3))^2 + (5-(-2))^2}$$

$$d(C,A) = \sqrt{(2+3)^2 + (5+2)^2}$$

$$d(C,A) = \sqrt{(5)^2 + (7)^2}$$

$$d(C,A) = \sqrt{25+49}$$

$$d(C,A) = \sqrt{74} = 8.60$$

Así el perímetro del triángulo está dado por la suma de estas longitudes:

$$P = 8.24 + 7.07 + 8.60 = 23.91$$

Mientras que el área se obtiene mediante la fórmula: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Tomando $s = \frac{23.91}{2} = 11.95, a = 7.07,\ b = 8.60, c = 8.24$ y sustituyendo

$$A = \sqrt{11.95(11.95-7.07)(11.95-8.60)(11.95-8.24)}$$

$$A = \sqrt{11.95(4.88)(3.35)(3.71)}$$

$$A = \sqrt{724.78} = 26.92$$

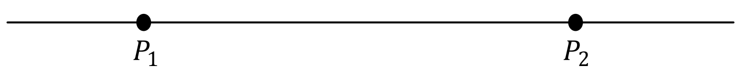
.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

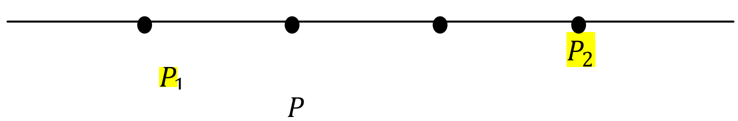
El problema que se plantea ahora es cómo dividir a un segmento en una razón dada. Una razón se interpreta como el cociente de dos números enteros, esto es:

$$r = \frac{x}{y}, y \neq 0.$$

Para comprender mejor el problema, supongamos que se nos pide dividir al siguiente segmento de recta en la razón $r = \frac{1}{2}$, ¿En cuántas partes iguales dividiríamos al segmento?



Efectivamente, la razón "un medio" implica dividir a dicho segmento en tres partes iguales de la siguiente manera:

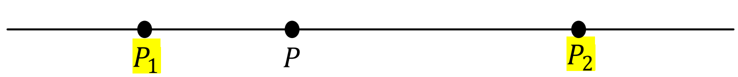


Para que de este modo, P sea el punto que divida al segmento en la razón $r = \frac{1}{2}$. Es decir, que la razón r en la que el punto P divide al segmento P_1P_2, está dada por:

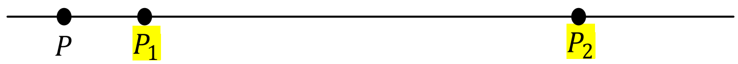
$$r = \frac{P_1P}{PP_2}, \quad r \neq -1$$

De donde se pueden observar tres casos importantes, relacionados con la ubicación del punto P en el segmento:

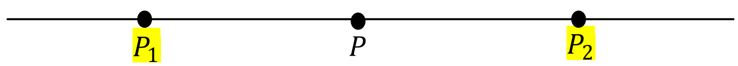
a) Si el punto P está situado dentro del segmento, entonces la relación $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ es positiva; puesto que los segmentos P_1P y PP_2 estarían dirigidos en el mismo sentido.



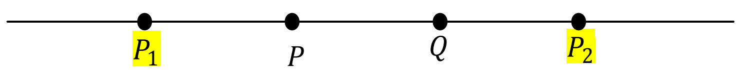
a) Si el punto P estuviera situado en la prolongación del segmento, a uno u otro lado del mismo, la relación $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ es negativa; ya que los segmentos estarían dirigidos en sentidos opuestos.



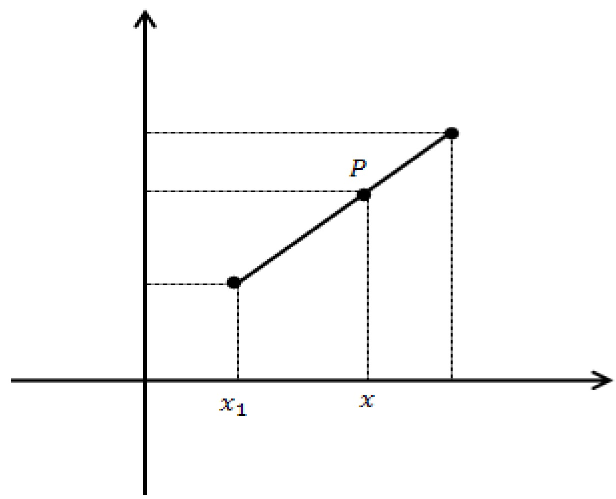
b) Por último, si el punto P divide al segmento en dos partes iguales entonces la relación $r = \frac{P_1P}{PP_2} = 1$ y se tendría el caso en el que P es exactamente el punto medio del segmento P_1P_2.



c) Según con lo explicado anteriormente ¿En qué razón divide el punto Q al segmento P_1P_2?



Esta idea de encontrar el punto que divide a un segmento en una razón dada se puede trasladar a un sistema coordenado rectangular. Esto es, si consideramos a un segmento trazado sobre un plano cartesiano como el que se muestra en la figura:



Entonces los puntos que delimitan al segmento de recta considerado son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$; luego las coordenadas del punto $P(x, y)$ que dividen al segmento en la razón dada r, están dadas mediante las siguientes expresiones:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

con $r \neq -1$.

Para el caso particular, que $r = 1$, entonces estaremos hablando del punto medio del segmento y las fórmulas se reducen a:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

<u>Ejemplo 1</u>. Calcular el punto de división de un segmento cuyos extremos son los puntos $A(-2,2)$ y $B(4,5)$ en la razón $r = 2$.

Solución: Antes de hacer las sustituciones en la fórmula, se recomienda etiquetar las coordenadas de los puntos: $x_1 , y_1 x_2 , y_2$
$A(-2 , 2)$y$B(4 , 5)$

Si denotamos al punto de división mediante la letra C entonces sus coordenadas son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-2 + (2)(4)}{1 + 2}$$

$$x = \frac{-2 + 8}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{2 + (2)(5)}{1 + 2}$$

$$y = \frac{2 + 10}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Es decir, el punto que divide al segmento dado en la razón $r = 2$ es: $C(2{,}4)$

__Ejemplo 2__.Calcular el punto medio para el segmento dado en el ejemplo anterior.

Solución: Si ahora denotamos al punto medio mediante la letra M entonces, sus coordenadas son las siguientes:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

Esto es, el punto que divide exactamente en dos partes iguales al segmento del ejemplo anterior es: $M(1{,}3.5)$, gráficamente: