

UNIDAD II Polígonos y Circunferencia.

Objetivo de la unidad: El estudiante: Resolverá problemas relacionados con polígonos y circunferencia, de tipo teórico o prácticos en distintos ámbitos, mediante la aplicación y el análisis de teoremas, recta, triángulos y ángulos, en un ambiente escolar que favorezca el desarrollo de actitudes de responsabilidad, cooperación, iniciativa y colaboración hacia el entorno en el que se desenvuelve.

2.1 Polígonos.

2.1.1 Definición

2.1.2 Clasificación

- Regulares
- Irregulares

• Sus elementos

- Radio
- Apotema
- Diagonales

2.1.3 Suma de ángulos

- Interiores
- Exteriores

2.1.4 Triangulación de polígonos.

2.1.5 Cálculo de perímetros y áreas.

2.2 Circunferencia y círculo.

2.2.1 Definición y elementos.

- Radio
- Diámetro
- Cuerda
- Arco
- Tangente
- Secante

2.2.2 Rectas tangentes a un círculo.

2.2.3 Ángulos.

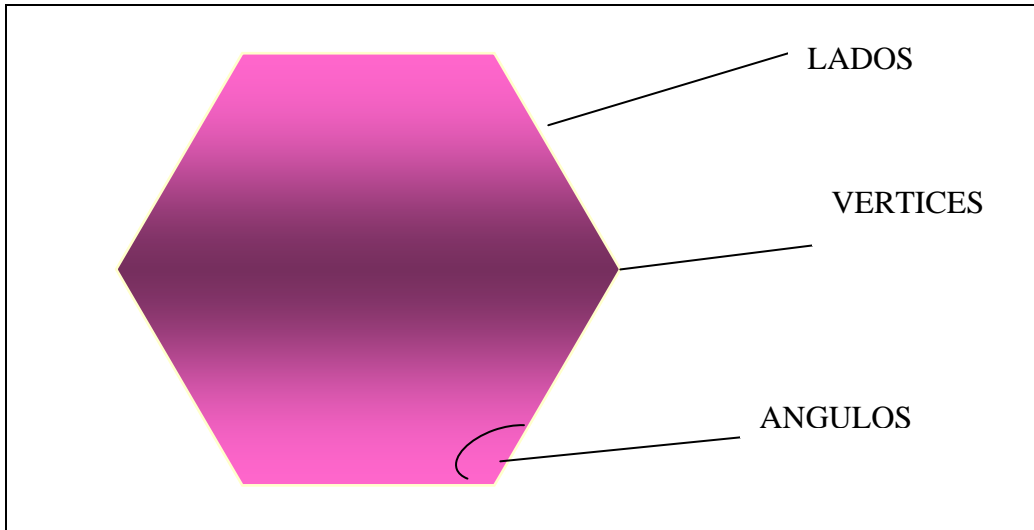
- Central
- Inscrito
- Circunscrito

2.2.4 Perímetros y áreas.

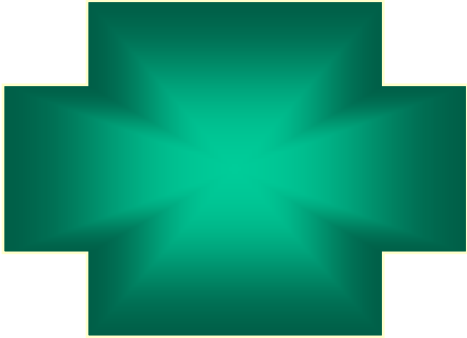
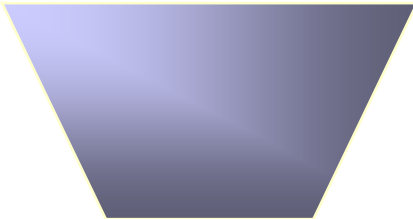


2.1 Polígonos.




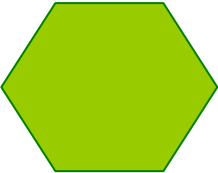
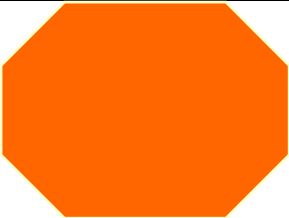
2.1.1 Definición. Es una figura plana, cerrada y simple formada por segmentos. Proviene del latín **poli** que significa muchos y de **gonos** que significa ángulos, que pudiera traducirse como una figura de **muchos ángulos**.



NOTA. Podemos hacer clasificaciones distintas de los polígonos atendiendo a sus distintas características, a los distintos parámetros.

CLASIFICACION DE LOS POLIGONOS SEGÚN LA MAGNITUD DE SUS ANGULOS.	
<p>CONCAVOS. Tienen a menos un ángulo interior de más de 180°. Observa que, en los ángulos que son mayores de 180°, el vértice apunta hacia dentro de la figura.</p>	
<p>CONVEXOS. Sus ángulos interiores son todos ellos menores de 180°. Observa como todos los vértices de los ángulos apuntan hacia fuera.</p>	

NOTA. Los polígonos se pueden clasificar también de acuerdo al número de de lados que este tenga. La tabla no está del todo terminada. Tú podrías investigar para terminar las celdas que hacen falta.

CLASIFICACION DE LOS POLIGONOS SEGÚN EL NUMERO DE LADOS	
TRIANGULOS. Polígonos de tres lados. En la figura se muestra un triángulo rectángulo.	
CUADRILATEROS. Polígonos de cuatro lados. En la figura se muestra un rectángulo.	
PENTAGONOS. Polígonos de cinco lados.	
EXAGONO. Polígono de seis lados.	
HEPTAGONO. Polígono de siete lados	
OCTAGONO. Polinomos de ocho lados.	
ENEAGONO.	
DECAGONO.	
PARA NOMBRAR POLIGONOS MAYORES DE QUINCE LADOS SIMPLEMENTE SE NOMBRAN COMO: POLIGONO DE VEINTE LADOS, POR EJEMPLO.	

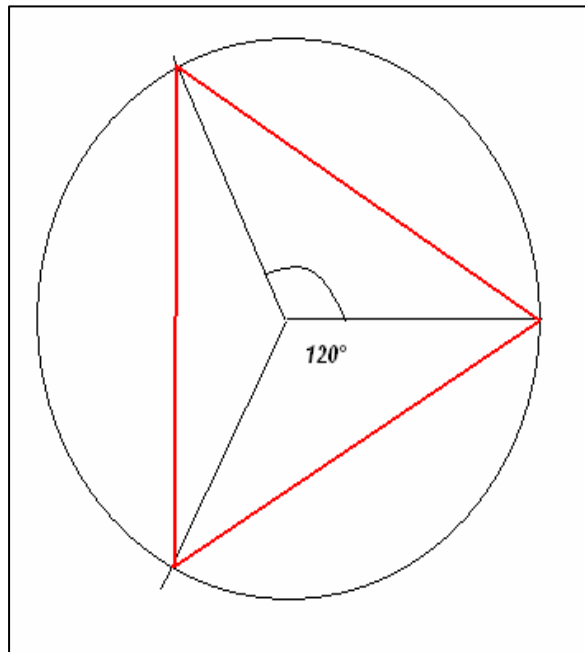
NOTA. Los polígonos también se pueden clasificar de acuerdo a si sus ángulos y lados son iguales o diferentes entre sí.

POLIGONOS REGULARES	Son aquellos polígonos que tienen sus lados todos iguales. De la misma manera todos sus ángulos deberán ser iguales.
POLIGONOS IRREGULARES	Son los polígonos que a menos un de sus lados es distinto a los demás.

MÉTODO para trazar un polígono regular en una circunferencia (polígono inscrito en una circunferencia).

TRAZO DE UN TRIANGULO. Hagámoslo primeramente sin preocuparnos el tamaño de los lados del polígono a trazar, pensemos simplemente en trazarlo cuidando que sus lados sean iguales.

- 1) Tracemos primeramente una circunferencia.
- 2) Identifiquemos el centro de ésta y un punto de la circunferencia.
- 3) Tracemos un radio a este punto de la circunferencia, el cual nos servirá como referencia para apoyar un transportador.
- 4) Partiendo de esta línea, tracemos un radio a un ángulo igual a: $\theta = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$
- 5) Encontraremos un segundo punto sobre la circunferencia.
- 6) Repetimos la acción del punto cuatro pero partiendo de esta última línea.
- 7) Encontraremos así el tercer punto.
- 8) Estos tres puntos son los tres vértices del triángulo buscado, nuestro polígono regular de tres lados (llamado triángulo equilátero).



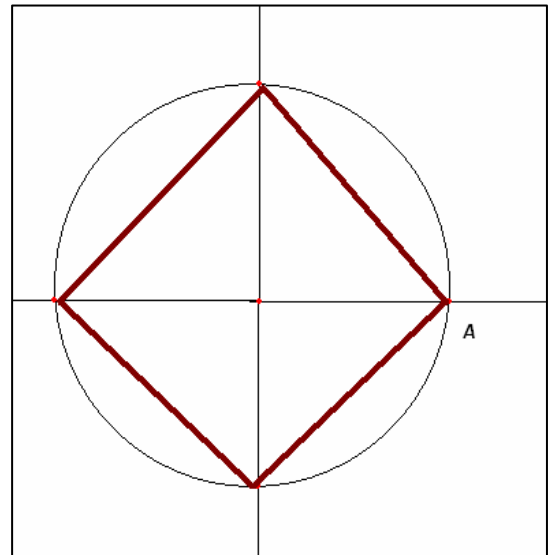
GENERALIZACIÓN DEL METODO. Los pasos descritos anteriormente se pueden reproducir independientemente del polígono que se quiera trazar, es decir sin importan cuantos lados tenga nuestro polígono; únicamente habrían de encontrarse tantos puntos como lados tenga nuestro polígono.

TRZO DE UN POLIGONO DE n LADOS.

- 1) Tracemos primeramente una circunferencia.
- 2) Tracemos un radio al azar. El punto que se obtenga en la circunferencia será el primero de los n vértices buscados.
- 3) El ángulo al que se trazarán los radios es $\theta = \frac{360^\circ}{n}$
- 4) Cada uno de los vértices del polígono se encontrarán trazando radios con el ángulo encontrado con la fórmula anterior.
- 5) La unión de estos puntos sobre la circunferencia, mediante cuerdas, formará el polígono buscado.

TRAZO DE UN CUADRILATERO.

- 1) Trazaríamos una circunferencia.
- 2) Trazamos un radio y localizamos el punto A en la circunferencia.
- 3) Encontramos el ángulo $\theta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$
- 4) Con un ángulo $\theta = 90^\circ$ trazaremos consecutivamente los vértices restantes, siempre apoyando el transportador sobre la línea que se traza.
- 5) Unimos los cuatro puntos encontrados y se encuentra con ello el cuadrilátero (cuadrado).



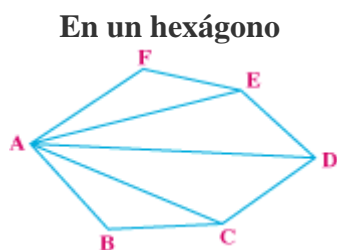
NOTA. Sería conveniente que trazaras, para que ejercites el método, los polígonos llamados Pentágono y Hexágono. No dejes pasar mucho tiempo y tratar de seguir paso a paso el método que se te está proponiendo.

PROPIEDADES GENERALES DE LOS POLIGONOS.

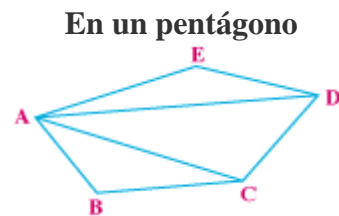
- La suma de los ángulos inscritos de un polígono convexo de "n" lados es igual a tantas veces un ángulo llano como lados menos dos tiene el polígono. $S_{\alpha} = 180^{\circ}(n - 2)$.
- El valor de un solo ángulo inscrito de un polígono convexo regular de "n" lados es: $\alpha = \frac{180^{\circ}(n - 2)}{n}$.
- El valor de un solo ángulo central de un polígono convexo regular de "n" lados es: $\theta = \frac{360^{\circ}}{n}$.
- El número total de diagonales de un polígono es: De cada vértice de un polígono se pueden trazar (n - 3) diagonales; de los "n" vértices se podrán trazar n(n - 3) diagonales, pero todo sobre dos, pues cada diagonal corresponde a dos vértices diferentes. $D_T = \frac{n(n - 3)}{2}$

DIAGONALES EN UN POLIGONO. En una de las propiedades anteriores, de hecho la última, se cita una fórmula mediante la cual se puede calcular el número de diagonales que tendrá un polígono de n lados.

Como ejemplo veamos los casos siguientes:



Desde el vértice A se pueden trazar 3 diagonales



Desde A trazaremos 2 diagonales.

Podrás observar que en el polígono de 6 lados obtuvimos 3 diagonales, desde el vértice A; y en el polígono de 5 lados, sólo 2. Si te fijas, desde cada uno de los vértices se podría hacer lo mismo, para cada uno de los polígonos, es decir siempre (n-3) diagonales. El evento se podría repetir para cada uno de los n vértices de nuestros polígonos.

Considerando que, por ejemplo la diagonal del vértice A hasta el vértice E es la misma que la diagonal trazada desde el vértice E hasta el vértice A, es decir se repite para la contabilidad, tenemos que:

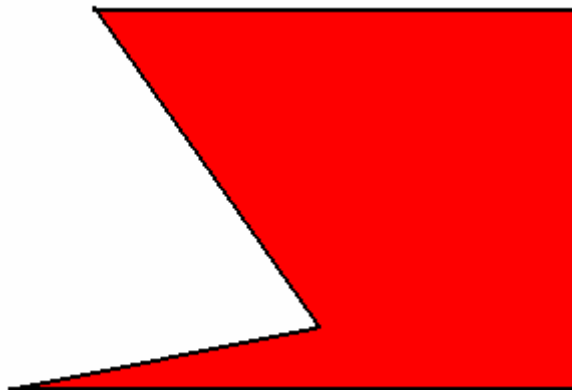
“el número de diagonales de un polígono, es equivalente a la mitad del producto entre el número de lados y el número de diagonales que se trazan desde un vértice”. Su fórmula:

$D_T = \frac{n(n - 3)}{2}$

EJERCICIOS SECCION 2.1

- 1) Cuál de los elementos presentaos en los incisos se refiere a un ejemplo de polígono?
 - a) Trapecio
 - b) Cono.
 - c) Cilindro.
 - d) Circunferencia.

- 2) La siguiente figura es un ejemplo de un polígono:



- a) Equiángulo
 - b) Convexo
 - c) Cóncavo
 - d) Recto

- 3) Un hexágono regular es un ejemplo de polígono:
 - a) Equilátero.
 - b) Cóncavo.
 - c) Convexo.
 - d) Irregular.

- 4) Si tenemos un polígono en el cual se pueden trazar 3 diagonales desde uno de sus vértices, estamos hablando de un:
 - a) Pentágono
 - b) Hexágono
 - c) Triángulo.
 - d) Cuadrilátero

5) El número de diagonales totales que se pueden trazar en heptágono son:

- a) 7
- b) 14
- c) 4
- d) 10

6) La medida de cada uno de los ángulos interiores de un nonágono es:

- a) 140°
- b) 180°
- c) 161°
- d) 170°

7) La suma de 5 ángulos de un dodecágono es:

- a) 645°
- b) 150°
- c) 900°
- d) 750°

8) La suma de 4 ángulos internos de hexágono regular es:

- a) 480°
- b) 120°
- c) 360°
- d) 280°

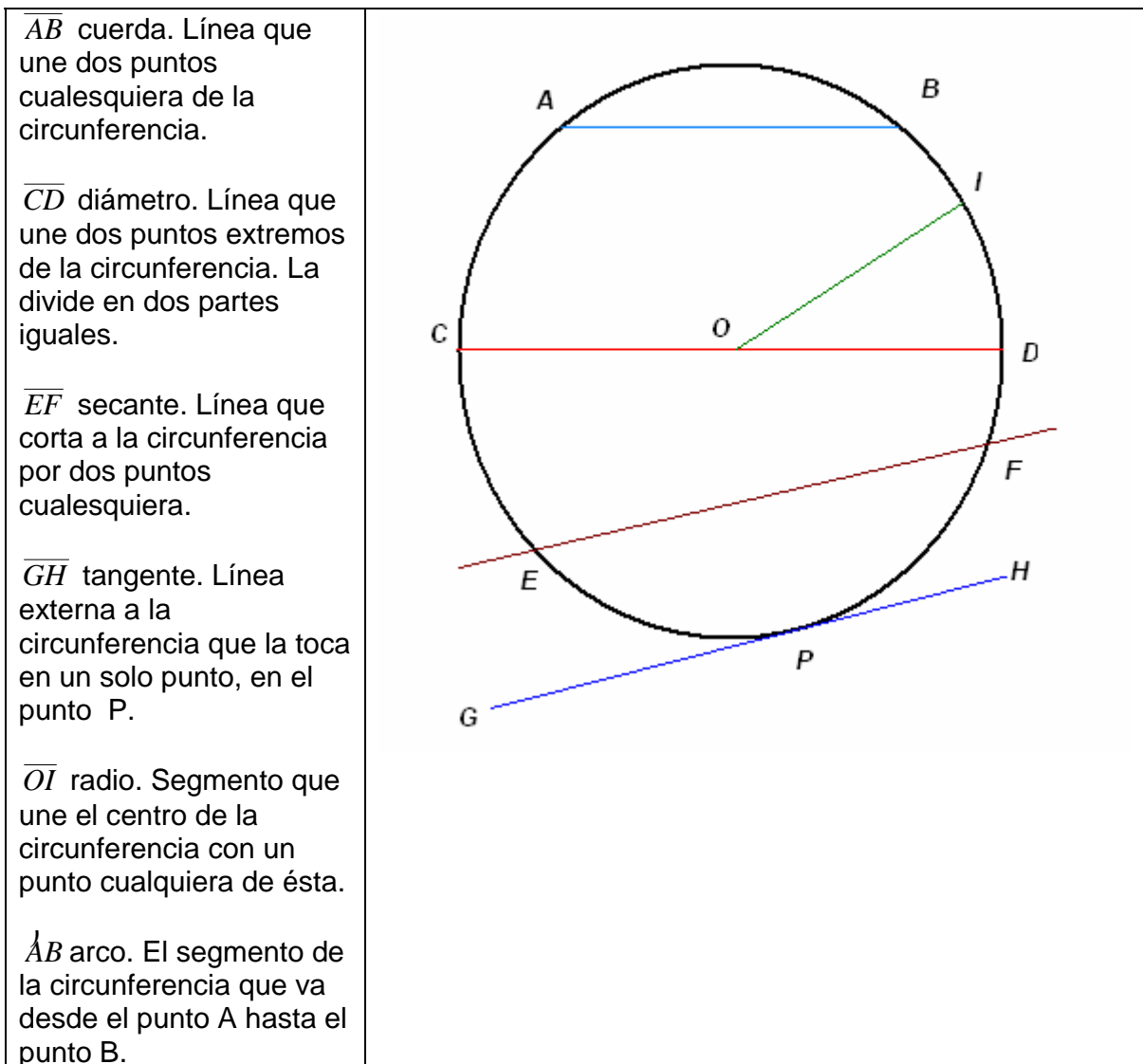




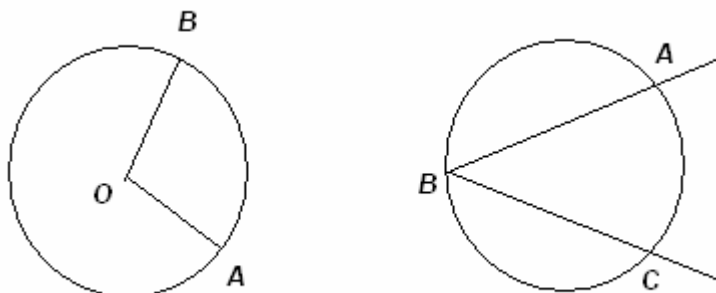
2.2 Circunferencia y círculo.

2.2.1 Definición y elementos. La Circunferencia es una curva cerrada cuyos puntos están en un mismo plano. Todos estos equidistan de otro punto llamado centro de la circunferencia. El Círculo es la superficie definida, encerrada, por una circunferencia.

Algunas líneas notables, importantes, en la circunferencia se presentan en el siguiente dibujo:



ANGULOS IMPORTANTES. Existen ángulos que son sumamente importantes en el estudio de las propiedades de la circunferencia y de las figuras que se relacionan con esta. Veamos la siguiente tabla que nos da una relación de estos ángulos citados:

<p>Angulo central. Es el ángulo que forman dos radios trazados a dos diferentes puntos de la circunferencia. En la figura se trata del $\angle AOB$</p> <p>Angulo inscrito. Es el ángulo cuyo vértice se encuentra en la circunferencia y que se forma por dos secantes, que pasan por este vértice. En la figura $\angle ABC$.</p>	
---	--

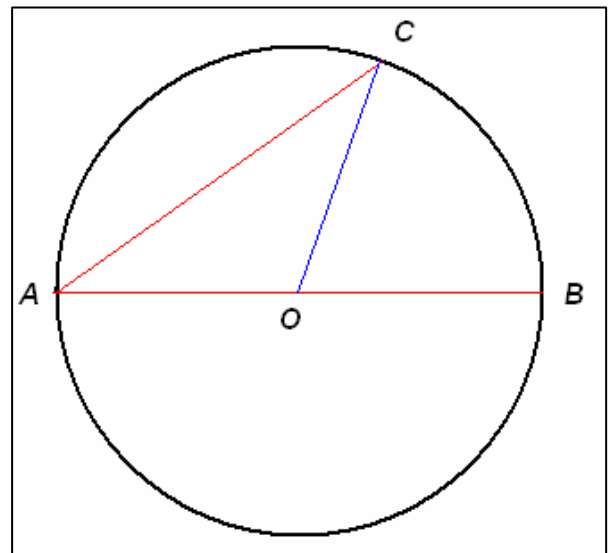
ALGUNOS RESULTADOS.

TEOREMA. Un ángulo inscrito en una circunferencia tiene un ángulo igual a la mitad del arco determinado por este, es decir la mitad del ángulo central que define este ángulo.

El ángulo $\angle CAB$ es un ángulo inscrito a la circunferencia por tener el vértice sobre ésta y estar formado por dos secantes.

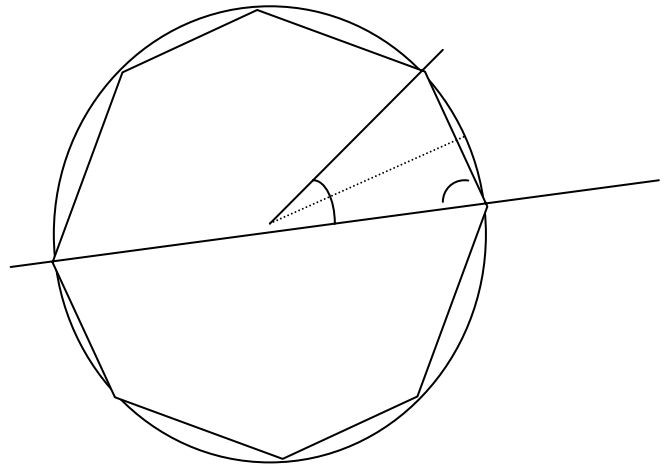
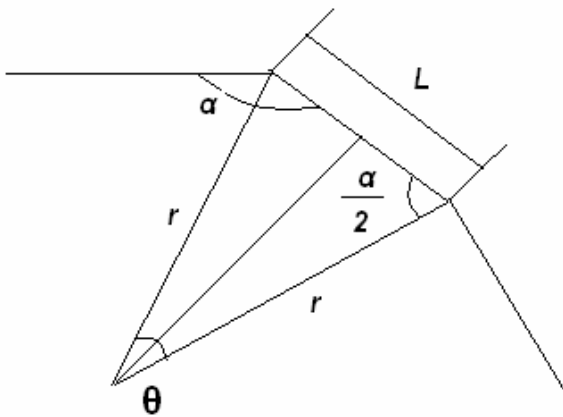
El ángulo $\angle COB$ es el ángulo central definido por el mismo arco .

Concluimos con que $\angle CAB = \frac{1}{2} \angle COB$.



METODO PARA CALCULO DE

PAERIMETROS. En la figura de abajo se reproduce el triángulo del polígono inscrito en la circunferencia, de la figura de lado, en donde se muestran los detalles para auxiliarnos en los cálculos que necesitamos.



Análisis para el cálculo del lado de un polígono inscrito en una circunferencia de radio igual a r . En las propiedades de los polígonos se dijo que el ángulo inscrito para un polígono de n lados se determina por la fórmula:

$\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ y por tanto el ángulo del triángulo rectángulo de la figura está

determinado por la fórmula $\frac{\alpha}{2} = \frac{180^\circ(n-2)}{2n}$. De esta manera podemos calcular cuanto mide el lado del polígono de n lados, esto, utilizando la función coseno:

$$\cos\left(\frac{180^\circ(n-2)}{2n}\right) = \frac{L/2}{r} \text{ y de esta manera, el lado vale: } L = (2r) \left[\cos\left(\frac{180^\circ(n-2)}{2n}\right) \right]$$

CONCLUSION. El perímetro de un polígono de n lados inscrito en una circunferencia de radio r se determina mediante la formula siguiente:

$$P = (2rn) \left[\cos\left(\frac{180^\circ(n-2)}{2n}\right) \right]$$

EJERCICIOS SECCION 2.2

- 1) Define lo que es un círculo.
 - a) Conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.
 - b) Conjunto de todos los puntos interiores a una circunferencia.
 - c) Conjunto de circunferencias con centro común.
- 2) Cualquier segmento que une un punto de la circunferencia con su centro se llama:
 - a) Secante
 - b) Cuerda
 - c) Radio.
- 3) Cómo se llama al ángulo dentro de la circunferencia cuyo vértice está en la circunferencia.
 - a) Central
 - b) Interior
 - c) Inscrito.
- 4) La medida de un ángulo central es igual a:
 - a) El arco que abarca.
 - b) La mitad del arco que abarca.
 - c) La semisuma de los arcos que abarca.
- 5) Determina el valor de los ángulos inscritos de un hexágono en una circunferencia.
 - a) 60°
 - b) 120°
 - c) 30°
- 6) Determina el valor de los ángulos inscritos para un pentágono
 - a) 150°
 - b) 108°
 - c) 110°
- 7) Determina el perímetro del hexágono inscrito en una circunferencia con radio igual a 5cm (cinco centímetros).
 - a) 45cm
 - b) 20cm
 - c) 30cm

