EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Trabajar en **álgebra** consiste en manejar **relaciones numéricas** en las que una o más cantidades son **desconocidas**. Estas cantidades se llaman **VARIABLES**, **INCÓGNITAS** o **INDETERMINADAS** y **se representan por letras**.

Una <u>expresión algebraica</u> es una combinación de letras y números ligadas por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Las expresiones algebraicas nos permiten, por ejemplo, hallar áreas y volúmenes.

Ejemplos de expresiones algebraicas son:

Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia.

Área del cuadrado: $S = l^2$, donde l es el lado del cuadrado.

Volumen del cubo: $V = a^3$, donde a es la arista del cubo.

Valor numérico de una expresión algebraica

El valor numérico de una expresión algebraica, para un determinado valor, es el número que se obtiene al sustituir en ésta el valor numérico dado y realizar las operaciones indicadas.

$L(r) = 2\pi r$

$r = 5$ cm. $L(5) = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi$ cm

$S(l) = l^2$

$l = 5$ cm $A(5) = 5^2 = 25$ cm^2

$V(a) = a^3$

$a = 5$ cm $V(5) = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$

Clasificación de las expresiones algebraicas

Monomio

Un **monomio** es una expresión algebraica en la que las únicas **operaciones** que aparecen entre las variables son el **producto y la potencia de exponente natural**.

Binomio

Un **binomio** es una expresión algebraica formada por **dos monomios.**

Trinomio

Un **trinomio** es una expresión algebraica formada por **tres monomios.**

Polinomio

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por **más de un monomio.**

Monomios

Un **MONOMIO** es una **expresión algebraica** en la que las únicas **operaciones** que aparecen entre las variables son el **producto y la potencia de exponente natural**.

$2x^2 y^3 z$

Partes de un monomio

Coeficiente

El **coeficiente** del monomio es el número que aparece multiplicando a las variables.

Parte literal

La **parte literal** está constituida por las letras y sus exponentes.

Grado

El **grado** de un monomio es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

El grado de $2x^2 y^3 z$ es: $2 + 3 + 1 = 6$

Monomios semejantes

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

$2x^2 y^3 z$ es semejante a $5x^2 y^3 z$

Operaciones con monomios

Suma de Monomios

Sólo podemos **sumar monomios semejantes**.

La suma de los monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

$\mathbf{ax^n + bx^n = (a + b)bx^n}$

$2x^2 y^3 z + 3x^2 y^3 z = 5x^2 y^3 z$

Si los monomios no son semejantes se obtiene un polinomio.

$2x^2 y^3 + 3x^2 y^3 z$

Producto de un número por un monomio

El producto de un número por un monomio es otro **monomio semejante** cuyo **coeficiente** es el **producto del coeficiente** de monomio **por el número**.

$5 \cdot 2x^2 y^3 z = 10x^2 y^3 z$

Producto de monomios

El producto de monomios es otro **monomio** que tiene por **coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando entre sí las partes literales teniendo en cuenta las propiedades de las potencias.**

$\mathbf{ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)bx^{n+m}}$

$5x^2 y^3 z \cdot 2 y^2 z^2 = 10 x^2 y^5 z^3$

Cociente de monomios

.

El cociente de monomios es otro **monomio** que tiene por **coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo entre sí las partes literales teniendo en cuenta las propiedades de las potencias**

$\mathbf{ax^n : bx^m = (a : b)bx^{n-m}}$

$$\frac{6x^3y^4z^2}{3x^2y^2z^2} = 2xy^2$$

Potencia de un monomio

Para realizar la potencia de un monomio se eleva, cada elemento de éste, al exponente de la potencia.

$(ax^n)^m = a^m \cdot bx^{n \cdot m}$

$(2x^3)^3 = 2^3(x^3)^3 = 8x^8$

$(-3x^2)^3 = (-3)^3(x^3)^2 = -27x^6$

Concepto de polinomio de una sola variable

Un **polinomio** de una sola variable es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Siendo $a_n, a_{n-1} \dots a_1, a_0$ números, llamados **coeficientes**.

n un número natural.

x la variable o indeterminada.

a_n es el coeficiente principal.

a_0 es el término independiente.

Grado de un polinomio

El **grado** de un polinomio P(x) es el **mayor exponente** al que se encuentra elevada la **variable** x.

Tipos de polinomios

Polinomio nulo

El **polinomio nulo** tiene todos sus **coeficientes nulos**.

Polinomio completo

Un **polinomio completo** tiene **todos los términos** desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$

Polinomio ordenado

Un **polinomio** está **ordenado** si los **monomios** que lo forman están escritos de **mayor a menor grado**.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

Tipos de polinomios según su grado

Polinomio de grado cero

$P(x) = 2$

Polinomio de primer grado

$P(x) = 3x + 2$

Polinomio de segundo grado

$P(x) = 2x^2 + 3x + 2$

Polinomio de tercer grado

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

Polinomio de cuarto grado

$P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

Valor numérico de un polinomio

El **valor numérico de un polinomio** es el resultado que obtenemos al sustituir la variable x por un número cualquiera.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3 \; ; \; x = 1$

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 3 = 2 + 5 - 3 = 4$

Suma de polinomios

Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ $\qquad$ $Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$

1Ordenamos los polinomios, si no lo están.

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

2Agrupamos los monomios del mismo grado.

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4x - 3$

3Sumamos los monomios semejantes.

$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$

Resta de polinomios

La resta de polinomios consiste en **sumar el opuesto del sustraendo**.

$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$

$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$

Producto

Producto de un número por un polinomio

Es otro **polinomio** que tiene de **grado** el **mismo** del polinomio y como **coeficientes** el **producto de los coeficientes del polinomio por el número**.

$3 \cdot (2x^3 - 3 x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

Producto de un monomio por un polinomio

Se **multiplica el monomio** por todos y **cada** uno de los **monomios que forman el polinomio**.

$3 x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$

Producto de polinomios

$P(x) = 2x^2 - 3 \quad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.

$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$

$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$

Se suman los monomios del mismo grado.

$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$

Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

Cociente de polinomios

Resolver el cociente:

P(x) = $2x^5 + 2x^3 - x - 8$ Q(x) = $3x^2 - 2x + 1$

P(x) : Q(x)

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio **no es completo** dejamos **huecos** en los lugares que correspondan.

$$\begin{array}{llll|l} x^5 & & +2x^3 & & -x-8 & x^2-2x+1 \\ \hline \end{array}$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Realizamos el cociente entre el primer monomio del dividendo y el primer monomio del divisor.

$x^5 : x^2 = x^3$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

$$\begin{array}{l|l} x^5 \qquad +2x^3 \qquad\qquad -x-8 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^5+2x^4-x^3} & x^3 \\ \qquad 2x^4+x^3 \qquad\qquad -x-8 & \end{array}$$

Volvemos a dividir el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$2x^4 : x^2 = 2x^2$

$$\begin{array}{l|l} x^5 \qquad +2x^3 \qquad\qquad -x-8 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^5+2x^4-x^3} & x^3+2x^2 \\ \qquad 2x^4+x^3 \qquad\qquad -x-8 & \\ \quad \underline{-2x^4+4x^3-2x^2} & \\ \qquad\qquad 5x^3-2x^2-x-8 & \end{array}$$

Procedemos igual que antes.

$5x^3 : x^2 = 5\ x$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
\underline{-x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-x^3} & & & & x^3+2x^2+5x \\
 & 2x^4 & +x^3 & & -x & -8 & \\
 & \underline{-2x^4} & \underline{+4x^3} & \underline{-2x^2} & & & \\
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & -8 & \\
 & & \underline{-5x^3} & \underline{+10x^2} & \underline{-5x} & & \\
 & & & 8x^2 & -6x & -8 &
\end{array}
$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones.

$8x^2 : x^2 = 8$

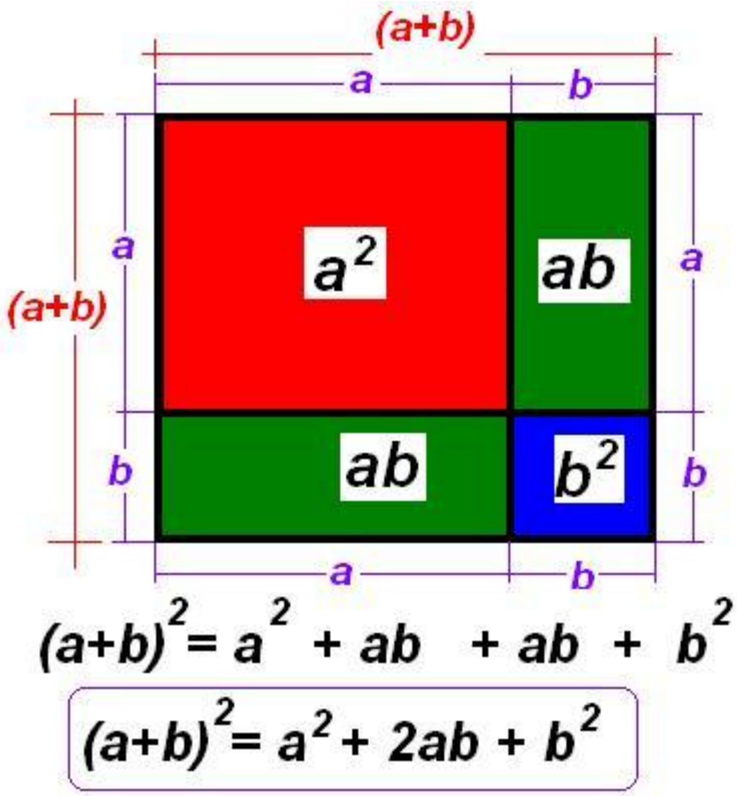
$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
\underline{-x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-x^3} & & & & x^3+2x^2+5x+8 \\
 & 2x^4 & +x^3 & & & & \\
 & \underline{-2x^4} & \underline{+4x^3} & \underline{-2x^2} & & & \\
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & & \\
 & & \underline{-5x^3} & \underline{+10x^2} & \underline{-5x} & & \\
 & & & 8x^2 & -6x & -8 & \\
 & & & \underline{-8x^2} & \underline{+16x} & \underline{-8} & \\
 & & & & 10x & -16 &
\end{array}
$$

10x − 6 es el **resto**, porque su **grado es menor que el del divisor** y por tanto no se puede continuar dividiendo.

x^3+2x^2 +5x+8 es el cociente.

Identidades notables

Binomio al cuadrado



$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

Un binomio al cuadrado es igual es igual al cuadrado del primer término más, o menos, el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado segundo

Suma por diferencia

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

$(2x + 5) \cdot (2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

P(x) es el numerador y Q(x) el denominador.

Fracciones algebraicas equivalentes

Dos fracciones algebraicas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad y \quad \frac{R(x)}{S(x)}$$

son equivalentes, y lo representamos por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$$

si se verifica que P(x) · S(x) = Q(x) · R(x).

$$\frac{x+2}{x^2-4} \quad y \quad \frac{1}{x-2}$$

son **equivalentes** porque:

$(x+2) \cdot (x+2) = x^2 - 4$

Dada una fracción algebraica, **si multiplicamos el numerador y el denominador** de dicha fracción **por un mismo polinomio distinto de cero, la fracción algebraica resultante es equivalente a la dada.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot M(x)}{Q(x) \cdot M(x)} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) : M(x)}{Q(x) : M(x)}$$

Simplificación de fracciones algebraicas

Para **simplificar una fracción algebraica se divide el numerador y el denominador de la fracción por un polinomio que sea factor común de ambos.**

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{(x+2)}{(x-2)}$$