

PROBABILIDAD

DEFINICIONES

Probabilidad. Si el evento A puede ocurrir de $n(A)$ maneras diferentes de entre un total de n igualmente posibles, entonces la probabilidad de A es

$$P(A) = n(A)/n.$$

Espacio muestral (Ω). Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento. En la definición anterior, el espacio muestral Ω consta de n elementos (puntos muestrales).

Punto muestral (ω). Es un elemento de Ω , es decir un resultado particular del experimento. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$.

Evento (A). Es un conjunto de posibles resultados del experimento. A es un subconjunto de Ω ($A \subset \Omega$).

Por ejemplo, al tirar un dado hay $n = 6$ resultados posibles. El espacio muestral es $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ donde ω_1 es el evento de sacar un 1, ω_2 es el evento de sacar un 2, ω_3 es el evento de sacar un 3. ω_4 es el evento de sacar un 4, ω_5 es el evento de sacar un 5 y ω_6 es el evento de sacar un 6. Si definimos A como el evento de sacar un número par, entonces $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, por lo que $n(A) = 3$ y $P(A) = n(A)/n = 3/6 = 0.5$.

Algunas propiedades:

Si $P(A)$ es la probabilidad de un evento A dentro del espacio muestral Ω y \emptyset es el conjunto vacío:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\emptyset) = 0$
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
5. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
6. Probabilidad condicional. La probabilidad de A , una vez que B ha sucedido es

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

8. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$

Si A y B son eventos independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

9. Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

El método del punto muestral:

Para calcular la probabilidad de un evento:

1. Definir el experimento.
2. Listar los eventos posibles (definir Ω , el espacio muestral).
3. Asignar probabilidades a cada punto muestral en Ω . Asegurarse de que la suma de estas probabilidades sea igual a 1.

4. Definir el evento A como el conjunto de puntos de muestreo que satisfacen el criterio en cuestión $A = \{a_1, a_2, \dots\}$.

5. Calcular $P(A)$ como la suma de las $P(a_i)$.

Ejemplo: En una población de ratones con cinco individuos, dos de ellos están marcados. Si durante una sesión de trampeo se capturan dos individuos, ¿Cuál es la probabilidad de que los dos individuos capturados no tengan marca?

Identificando a los dos ratones con marca como M1 y M2 y a los tres sin marca S1, S2 S3, hay 10 pares posibles:

$$\omega_1 = \text{M1 M2}$$

$$\omega_2 = \text{M1 S1}$$

$$\omega_3 = \text{M1 S2}$$

$$\omega_4 = \text{M1 S3}$$

$$\omega_5 = \text{M2 S1}$$

$$\omega_6 = \text{M2S2}$$

$$\omega_7 = \text{M2 S3}$$

$$\omega_8 = \text{S1 S2}$$

$$\omega_9 = \text{S1 S3}$$

$$\omega_{10} = \text{S2 S3}$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$$

$$P(\omega_i) = 1/10$$

$$A = \{\omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$$

$$P(A) = 3/10 = 0.333$$

Métodos de conteo

Permutaciones de n objetos en grupos de k : ${}_n P_k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Combinaciones de n objetos en grupos de k : ${}_n C_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$