

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

Productos notables

Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades

Procedimiento

1. "El producto de la suma por la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo"
2. Para elevar un monomio al cuadrado, se eleva el coeficiente al cuadrado y se multiplica el exponente de cada letra por 2.

Escribir por simple inspección, el resultado de:

1. $(x+y)(x-y)$

Solución:

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2.$$

2. $(m-n)(m+n)$

Solución:

$$(m-n)(m+n) = (m+n)(m-n) = m^2 - n^2.$$

3. $(a-x)(x+a)$

Solución:

$$(a-x)(x+a) = (a-x)(a+x) \quad \{\text{cambiando el orden de los sumandos en el segundo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow (a-x)(x+a) = (a+x)(a-x) \quad \{\text{cambiando el orden de los factores}\};$$

$$\therefore (a-x)(x+a) = a^2 - x^2.$$

4. $(x^2+a^2)(x^2-a^2)$

Solución:

$$(x^2+a^2)(x^2-a^2) = (x^2)^2 - (a^2)^2 = x^{2 \times 2} - a^{2 \times 2};$$

$$\therefore (x^2+a^2)(x^2-a^2) = x^4 - a^4$$

5. $(2a-1)(1+2a)$

Solución:

$$(2a-1)(1+2a) = (2a-1)(2a+1) \quad \{\text{cambiando el orden de los sumandos en el segundo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow (2a-1)(1+2a) = (2a+1)(2a-1) \quad \{\text{cambiando el orden de los factores}\};$$

$$\therefore (2a-1)(1+2a) = (2a)^2 - 1^2 = 4a^2 - 1.$$

6. $(n-1)(n+1)$

Solución:

$$(n-1)(n+1) = (n+1)(n-1)(n+1) = n^2 - 1.$$

7. $(1-3ax)(3ax+1)$

Solución:

$$(1-3ax)(3ax+1) = (1-3ax)(1+3ax) \quad \{\text{cambiando el orden de los sumandos en el segundo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow (1-3ax)(3ax+1) = (1+3ax)(1-3ax) \quad \{\text{cambiando el orden de los factores}\};$$

$$\therefore (1-3ax)(3ax+1) = 1^2 - (3ax)^2 = 1 - 9a^2x^2.$$

Productos notables

Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades

Procedimiento

1. Se agrupa convenientemente (si es necesario, se factoriza por -1)
2. "El producto de la suma por la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo"
3. Para elevar un monomio al cuadrado, se eleva el coeficiente al cuadrado y se multiplica el exponente de cada letra por 2.

Escribir por simple inspección, el resultado de:

1. $(x+y+z)(x+y-z)$

Solución:

$$(x+y+z)(x+y-z) = [(x+y)+z][(x+y)-z] \quad \{\text{agrupando convenientemente}\},$$

$$\Rightarrow (x+y+z)(x+y-z) = (x+y)^2 - z^2,$$

$$\therefore (x+y+z)(x+y-z) = x^2 + 2xy + y^2 - z^2 \quad \{\text{desarrollando el cuadrado de la suma}\}.$$

2. $(x-y+z)(x+y-z)$

Solución:

$$(x-y+z)(x+y-z) = [x-(y-z)][x+(y-z)] \quad \{\text{agrupando convenientemente}\},$$

$$\Rightarrow (x-y+z)(x+y-z) = x^2 - (y-z)^2,$$

$$\Rightarrow (x-y+z)(x+y-z) = x^2 - (y^2 - 2yz + z^2) \quad \{\text{desarrollando el cuadrado de la diferencia}\},$$

$$\therefore (x-y+z)(x+y-z) = x^2 - y^2 + 2yz - z^2 \quad \{\text{destruyendo paréntesis}\}.$$

3. $(x+y+z)(x-y-z)$

Solución:

$$(x+y+z)(x-y-z) = [x+(y+z)][x-(y+z)] \quad \{\text{agrupando convenientemente}\},$$

$$\Rightarrow (x+y+z)(x-y-z) = x^2 - (y+z)^2,$$

$$\Rightarrow (x+y+z)(x-y-z) = x^2 - (y^2 + 2yz + z^2) \quad \{\text{desarrollando el cuadrado de la suma}\},$$

$$\therefore (x+y+z)(x-y-z) = x^2 - y^2 - 2yz - z^2 \quad \{\text{destruyendo paréntesis}\}.$$

4. $(m+n+1)(m+n-1)$

Solución:

$$(m+n+1)(m+n-1) = [(m+n)+1][(m+n)-1] \quad \{\text{agrupando convenientemente}\},$$

$$\Rightarrow (m+n+1)(m+n-1) = (m+n)^2 - 1^2,$$

$$\therefore (m+n+1)(m+n-1) = m^2 + 2mn + n^2 - 1 \quad \{\text{desarrollando el cuadrado de la suma}\}.$$

5. $(m-n-1)(m-n+1)$

Solución:

$$(m-n-1)(m-n+1) = [(m-n)-1][(m-n)+1] \quad \{\text{agrupando convenientemente}\},$$

$$\Rightarrow (m-n-1)(m-n+1) = (m-n)^2 - 1^2,$$

$$\therefore (m-n-1)(m-n+1) = m^2 - 2mn + n^2 - 1 \quad \{\text{desarrollando el cuadrado de la diferencia}\}.$$

6. $(x+y-2)(x-y+2)$

Solución:

$$(x+y-2)(x-y+2) = [x+(y-2)][x-(y-2)] \quad \{\text{agrupando convenientemente}\},$$

$$\Rightarrow (x+y-2)(x-y+2) = x^2 - (y-2)^2,$$

$$\Rightarrow (x+y-2)(x-y+2) = x^2 - (y^2 - 4y + 4) \quad \{\text{desarrollando el cuadrado de la diferencia}\};$$

$$\therefore (x+y-2)(x-y+2) = x^2 - y^2 + 4y - 4 \quad \{\text{destruyendo paréntesis}\}.$$

7. $(n^2 + 2n + 1)(n^2 - 2n - 1)$

Solución:

$$(n^2 + 2n + 1)(n^2 - 2n - 1) = [n^2 + (2n + 1)][n^2 - (2n + 1)] \quad \{\text{agrupando convenientemente}\},$$

$$\Rightarrow (n^2 + 2n + 1)(n^2 - 2n - 1) = n^4 - (2n + 1)^2,$$

$$\Rightarrow (n^2 + 2n + 1)(n^2 - 2n - 1) = n^4 - (4n^2 + 4n + 1) \quad \{\text{desarrollando el cuadrado de la suma}\};$$

$$\therefore (n^2 + 2n + 1)(n^2 - 2n - 1) = n^4 - 4n^2 - 4n - 1 \quad \{\text{destruyendo paréntesis}\}.$$

Productos notables

Producto de dos binomios de la forma $(x + a)(x + b)$

Procedimiento

1. El desarrollo de los paréntesis da un trinomio
2. El primer término será el cuadrado del primer término de los paréntesis (igual en ambos)
3. El segundo término será el producto de la suma de los términos independientes por el primer término común de los paréntesis
4. El tercer término será el producto de los términos independientes

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Escribir por simple inspección, el resultado de:

1. $(a + 1)(a + 2)$

Solución:

$$(a + 1)(a + 2) = a^2 + (1 + 2)a + 1 \times 2;$$

$$\therefore (a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2.$$

2. $(x + 2)(x + 4)$

Solución:

$$(x + 2)(x + 4) = x^2 + (2 + 4)x + 2 \times 4;$$

$$\therefore (x + 2)(x + 4) = x^2 + 6x + 8.$$

3. $(x + 5)(x - 2)$

Solución:

$$(x + 5)(x - 2) = x^2 + (5 - 2)x + 5 \times (-2);$$

$$\therefore (x + 5)(x - 2) = x^2 + 3x - 10.$$

4. $(m - 6)(m - 5)$

Solución:

$$(m - 6)(m - 5) = m^2 + (-6 - 5)m + (-6) \times (-5);$$

$$\therefore (m - 6)(m - 5) = m^2 - 11m + 30.$$

5. $(x+7)(x-3)$

Solución:

$$(x+7)(x-3) = x^2 + (7-3)x + 7 \times (-3);$$

$$\therefore (x+7)(x-3) = x^2 + 4x - 21.$$

6. $(x+2)(x-1)$

Solución:

$$(x+2)(x-1) = x^2 + (2-1)x + 2 \times (-1);$$

$$\therefore (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2.$$

7. $(x-3)(x-1)$

Solución:

$$(x-3)(x-1) = x^2 + (-3-1)x + (-3) \times (-1);$$

$$\therefore (x-3)(x-1) = x^2 - 4x + 3.$$

Productos notables

Miscelánea

1. $(x+2)^2$

Solución:

$$(x+2)^2 = x^2 + 2x(2) + 2^2 \quad \text{(desarrollando el cuadrado de la suma);}$$

$$\therefore (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4.$$

2. $(x+2)(x+3)$

Solución:

$$(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + 2 \times 3,$$

$$\therefore (x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6.$$

3. $(x+1)(x-1)$

Solución:

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1^2 \quad \text{(desarrollando el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades);}$$

$$\therefore (x+1)(x-1) = x^2 - 1.$$

4. $(x-1)^2$

Solución:

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x(1) + 1^2 \quad \text{(desarrollando el cuadrado de la diferencia de dos cantidades);}$$

$$\therefore (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

5. $(n+3)(n+5)$

Solución:

$$(n+3)(n+5) = n^2 + (3+5)n + 3 \times 5,$$

$$\therefore (n+3)(n+5) = n^2 + 8n + 15.$$

6. $(m-3)(m+3)$

Solución:

$$(m-3)(m+3) = m^2 - 3^2 \quad \text{\{desarrollando el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades\};}$$

$$\therefore (m-3)(m+3) = m^2 - 9.$$

7. $(a+b-1)(a+b+1)$

Solución:

$$(a+b-1)(a+b+1) = [(a+b)-1][(a+b)+1] \quad \text{\{agrupand convenientemente\},}$$

$$\Rightarrow (a+b-1)(a+b+1) = (a+b)^2 - 1^2 \quad \text{\{desarrollando la suma por la diferencia de dos cantidades\};}$$

$$\therefore (a+b-1)(a+b+1) = a^2 + 2a + b^2 - 1 \quad \text{\{desarrollando el cuadrado del binomio\}.$$

8. $(1+b)^3$

Solución:

$$(1+b)^3 = 1^3 + 3(1^2)b + 3(1)b^2 + b^3 \quad \text{\{desarrollando el cubo de un binomio\};}$$

$$\therefore (1+b)^3 = 1 + 3b + 3b^2 + b^3.$$

9. $(a^2+4)(a^2-4)$

Solución:

$$(a^2+4)(a^2-4) = (a^2)^2 - 4^2 \quad \text{\{(desarrollando el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades\};}$$

$$\therefore (n+3)(n+5) = a^4 - 16.$$

10. $(3ab-5x^2)^2$

Solución:

$$(3ab-5x^2)^2 = (3ab)^2 - 2(3ab)(5x^2) + (5x^2)^2 \quad \text{\{cuadrado de un binomio\};}$$

$$\therefore (3ab-5x^2)^2 = 9a^2b^2 - 30abx^2 + 25x^4.$$

Cocientes notables

1. $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$

Solución:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)} = \frac{\cancel{(x + 1)}(x - 1)}{\cancel{(x + 1)}};$$

$$\therefore \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1.$$

2. $\frac{1 - x^2}{1 - x}$

Solución:

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{(1 - x)} = \frac{(1 + x)\cancel{(1 - x)}}{\cancel{(1 - x)}};$$

$$\therefore \frac{1 - x^2}{1 - x} = 1 + x.$$

3. $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$

Solución:

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{(x + y)(x - y)}{(x + y)} = \frac{\cancel{(x + y)}(x - y)}{\cancel{(x + y)}};$$

$$\therefore \frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y.$$

4. $\frac{y^2 - x^2}{y - x}$

Solución:

$$\frac{y^2 - x^2}{y - x} = \frac{(y + x)(y - x)}{(y - x)} = \frac{(y + x)\cancel{(y - x)}}{\cancel{(y - x)}};$$

$$\therefore \frac{y^2 - x^2}{y - x} = y + x.$$

5. $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$

Solución:

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)} = \frac{\cancel{(x + 2)}(x - 2)}{\cancel{(x + 2)}};$$

∴ $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2.$

6. $\frac{9 - x^4}{3 - x^2}$

Solución:

$$\frac{9 - x^4}{3 - x^2} = \frac{(3 + x^2)(3 - x^2)}{(3 - x^2)} = \frac{(3 + x^2)\cancel{(3 - x^2)}}{\cancel{(3 - x^2)}};$$

∴ $\frac{9 - x^4}{3 - x^2} = 3 + x^2.$

7. $\frac{a^2 - 4b^2}{a + 2b}$

Solución:

$$\frac{a^2 - 4b^2}{a + 2b} = \frac{(a + 2b)(a - 2b)}{(a + 2b)} = \frac{\cancel{(a + 2b)}(a - 2b)}{\cancel{(a + 2b)}};$$

∴ $\frac{a^2 - 4b^2}{a + 2b} = a - 2b.$

8. $\frac{25 - 36x^4}{5 - 6x^2}$

Solución:

$$\frac{25 - 36x^4}{5 - 6x^2} = \frac{(5 + 6x^2)(5 - 6x^2)}{(5 - 6x^2)} = \frac{(5 + 6x^2)\cancel{(5 - 6x^2)}}{\cancel{(5 - 6x^2)}};$$

∴ $\frac{25 - 36x^4}{5 - 6x^2} = 5 + 6x^2.$

Cocientes notables

Cociente de la suma o diferencia de los cubos de dos cantidades entre la suma o diferencia de las cantidades

1. $\frac{1+a^3}{1+a}$

Solución:

$$\frac{1+a^3}{1+a} = \frac{(1+a)(1-a+a^2)}{(1+a)} = \frac{\cancel{(1+a)}(1-a+a^2)}{\cancel{(1+a)}};$$

$$\therefore \frac{1+a^3}{1+a} = 1-a+a^2.$$

2. $\frac{1-a^3}{1-a}$

Solución:

$$\frac{1-a^3}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a+a^2)}{(1-a)} = \frac{\cancel{(1-a)}(1+a+a^2)}{\cancel{(1-a)}};$$

$$\therefore \frac{1-a^3}{1-a} = 1+a+a^2.$$

3. $\frac{x^3+y^3}{x+y}$

Solución:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)} = \frac{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)}{\cancel{(x+y)}};$$

$$\therefore \frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2-xy+y^2.$$

4. $\frac{8a^3-1}{2a-1}$

Solución:

$$\frac{8a^3-1}{2a-1} = \frac{(2a-1)(4a^2+2a+1)}{(2a-1)} = \frac{\cancel{(2a-1)}(4a^2+2a+1)}{\cancel{(2a-1)}};$$

$$\therefore \frac{8a^3-1}{2a-1} = 4a^2+2a+1.$$

5. $\frac{8x^3 + 27y^3}{2x + 3y}$

Solución:

$$\frac{8x^3 + 27y^3}{2x + 3y} = \frac{(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)}{(2x + 3y)} = \frac{\cancel{(2x + 3y)}(4x^2 - 6xy + 9y^2)}{\cancel{(2x + 3y)}};$$

$$\therefore \frac{8x^3 + 27y^3}{2x + 3y} = 4x^2 - 6xy + 9y^2.$$

6. $\frac{27m^3 - 125n^3}{3m - 5n}$

Solución:

$$\frac{27m^3 - 125n^3}{3m - 5n} = \frac{(3m - 5n)(9m^2 + 15mn + 25n^2)}{(3m - 5n)} = \frac{\cancel{(3m - 5n)}(9m^2 + 15mn + 25n^2)}{\cancel{(3m - 5n)}};$$

$$\therefore \frac{27m^3 - 125n^3}{3m - 5n} = 9m^2 + 15mn + 25n^2.$$

7. $\frac{64a^3 + 343}{4a + 7}$

Solución:

$$\frac{64a^3 + 343}{4a + 7} = \frac{(4a + 7)(16a^2 - 28a + 49)}{(4a + 7)} = \frac{\cancel{(4a + 7)}(16a^2 - 28a + 49)}{\cancel{(4a + 7)}};$$

$$\therefore \frac{64a^3 + 343}{4a + 7} = 16a^2 - 28a + 49.$$

8. $\frac{216 - 125y^3}{6 - 5y}$

Solución:

$$\frac{216 - 125y^3}{6 - 5y} = \frac{(6 - 5y)(36 + 30y + 25y^2)}{(6 - 5y)} = \frac{\cancel{(6 - 5y)}(36 + 30y + 25y^2)}{\cancel{(6 - 5y)}};$$

$$\therefore \frac{216 - 125y^3}{6 - 5y} = 36 + 30y + 25y^2.$$

Cocientes notables

Cociente de la suma o diferencia de potencias iguales de dos cantidades entre la suma o diferencia de las cantidades

Procedimiento

Criterios de divisibilidad

Criterio 1: La diferencia de dos cantidades con potencias iguales, pares o impares, es divisible por la diferencia de las cantidades. Y, la forma general de su solución está dada por :

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}$$

Criterio 2: La diferencia de dos cantidades con igual potencia par, es divisible por la suma de las cantidades. Y, la forma general de su solución está dada por:

$$\frac{a^m - b^m}{a + b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} - b^{m-1}$$

Criterio 3: La suma de dos cantidades con igual potencia impar, es divisible por la suma de las cantidades. Y, la forma general de su solución está dada por :

$$\frac{a^m + b^m}{a + b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + \dots + a^2b^{m-3} - ab^{m-2} + b^{m-1}$$

Criterio 4:

A) La suma de dos cantidades con igual potencia par, **no** es divisible ni por la suma ni por la diferencia de las cantidades. Esto es, cocientes de la forma :

$$\frac{a^m + b^m}{a \pm b}, \text{ donde } m \text{ es par: no son exactos}$$

B) La diferencia de dos cantidades con igual potencia impar, **no** es divisible por la suma de las cantidades. Es decir, cocientes de la forma :

$$\frac{a^m - b^m}{a + b}, \text{ donde } m \text{ es impar: no son exactos}$$

Nota: Se dice que dos expresiones determinadas son divisibles, cuando su división es exacta, esto es, cuando al dividir a una (el dividendo) por la otra (el divisor), el residuo es cero.

Hallar, por simple inspección, el cociente de:

1. $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$

Solución:

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 \quad \{\text{criterio1}\}$$

2. $\frac{m^5 + n^5}{m + n}$

Solución:

$$\frac{m^5 + n^5}{m + n} = m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4 \quad \{\text{criterio3}\}$$

3. $\frac{a^5 - n^5}{a - n}$

Solución:

$$\frac{a^5 - n^5}{a - n} = a^4 + a^3n + a^2n^2 + an^3 + n^4 \quad \{\text{criterio1}\}$$

4. $\frac{x^6 - y^6}{x + y}$

Solución:

$$\frac{x^6 - y^6}{x + y} = x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5 \quad \{\text{criterio2}\}$$

5. $\frac{a^6 - b^6}{a - b}$

Solución:

$$\frac{a^6 - b^6}{a - b} = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 \quad \{\text{criterio1}\}$$

6. $\frac{x^7 + y^7}{x + y}$

Solución:

$$\frac{x^7 + y^7}{x + y} = x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6 \quad \{\text{criterio3}\}$$

7. $\frac{a^7 - m^7}{a - m}$

Solución:

$$\frac{a^7 - m^7}{a - m} = a^6 + a^5m + a^4m^2 + a^3m^3 + a^2m^4 + am^5 + m^6 \quad \{\text{criterio1}\}$$

8. $\frac{a^8 - b^8}{a + b}$

Solución:

$$\frac{a^8 - b^8}{a + b} = a^7 - a^6b + a^5b^2 - a^4b^3 + a^3b^4 - a^2b^5 + ab^6 - b^7 \quad \{\text{criterio2}\}$$