

Funciones algebraicas

Las funciones polinomiales tienen una gran aplicación en la elaboración de modelos que describen fenómenos reales. Algunos de ellos son: la concentración de una sustancia en un compuesto, la distancia recorrida por un móvil a velocidad constante, la compra de cierta cantidad de objetos a un precio unitario, el salario de un trabajador más su comisión, la variación de la altura de un proyectil, entre otros.

Una función algebraica explícita es aquella cuya variable y se obtiene combinando un número finito de veces la variable x y constantes reales por medio de operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces.

Un ejemplo de una función algebraica explícita es aquella para la cual la regla de correspondencia viene dada por:

$$y = \frac{(\sqrt{x+5})^3}{(x^{2/3} + 3)}$$

Definición:

“Las **funciones algebraicas** son aquellas cuya regla de correspondencia es una expresión algebraica”.

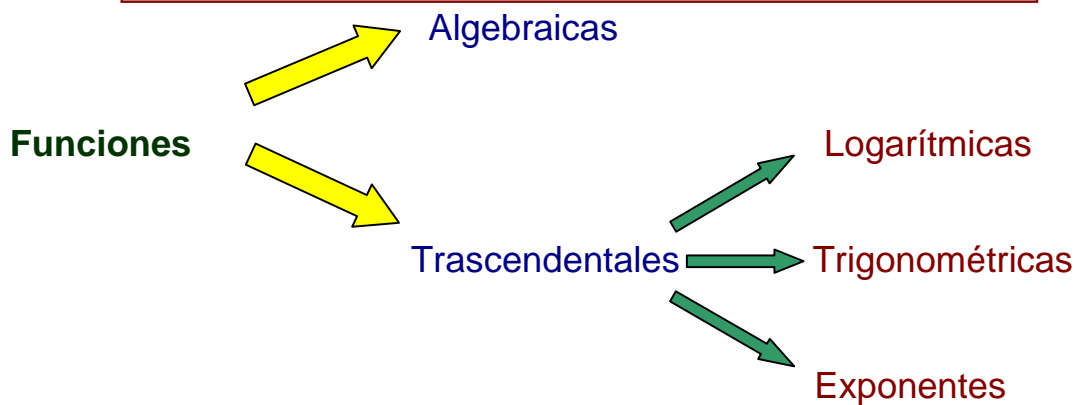
Funciones Trascendentes

No siempre se puede modelar con funciones del tipo algebraico; esto ha dado lugar al desarrollo de otro tipo de funciones, las **funciones trascendentes**, las cuales se clasifican en: las *trigonométricas* y *sus inversas*, relacionadas con el triángulo rectángulo; y las *logarítmicas* y *exponenciales*, más asociadas a una variación en progresión geométrica (crecimiento poblacional, por ejemplo).

Definición:

Se llama *función trascendente*, aquella cuya variable y contiene expresiones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas. Ejemplos de funciones trascendentes son las siguientes:

$$y = e^x + \sin x$$



2.2.1. Función Polinomial.

Función Polinomial

Como se mencionó, dentro de las funciones algebraicas tenemos un conjunto de funciones que llamamos “**funciones polinomiales** y son aquellas cuya regla de correspondencia es un polinomio”. Recordando que el grado de un polinomio es el exponente mayor de la variable, podemos hablar de una función polinomial de grado n .

Definición:

Función Polinomial	Llamamos a una función polinomial de grado n , si tiene la forma $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0$ en donde n es un entero positivo.
---------------------------	---

Todas las funciones polinomiales tienen como dominio al conjunto de números reales \mathbf{R} , pero su contradominio varía dependiendo del tipo de función que sea.

Una función polinomial puede considerarse como una suma de funciones cuyos valores son del tipo cx^k , donde c es un número real y k es un entero no negativo.

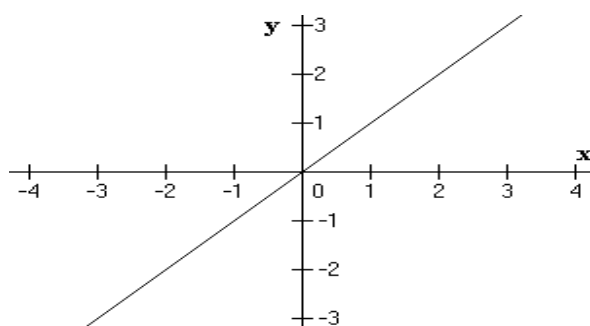
Ejemplos particulares de la función polinomial son, la función lineal (función polinomial de grado uno), la función cuadrática (función polinomial de segundo grado), función cúbica (función polinomial de tercer grado)

Función Identidad

Definición:

Función Identidad	La función de identidad se define mediante la expresión $f(x) = x$
--------------------------	---

“La **función identidad** tiene la propiedad de que a cada argumento x del dominio le hace corresponder el mismo valor en el contradominio y , por lo tanto, éste es \mathbf{R} ”. La gráfica de esta función es la recta que pasa por el origen y tiene un ángulo de inclinación de 45°



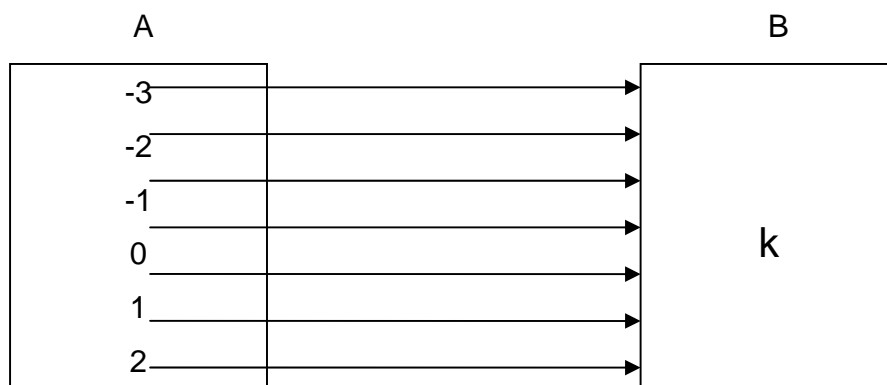
FUNCIÓN	DOMINIO	CONTRADOMINIO
$f(x) = x$	Todo número real $-\infty < x < \infty$	Todo número real $-\infty < x < \infty$

Función Constante

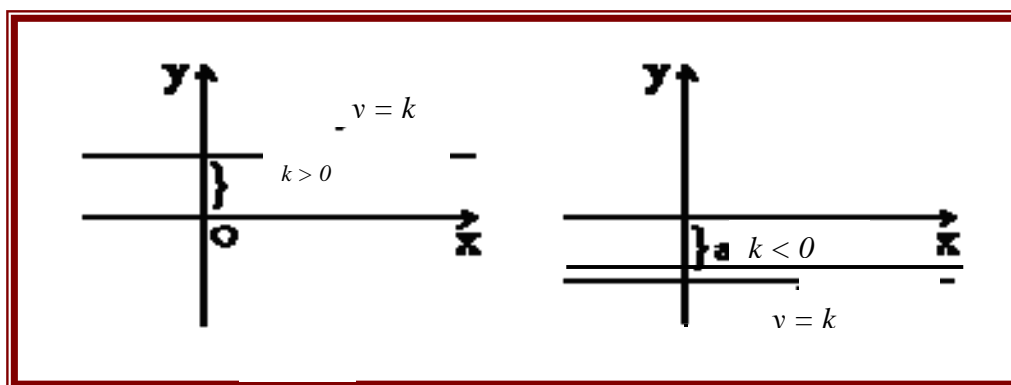
Definición:

Función Constante	La función constante se define mediante la expresión $f(x) = k$, en donde k es un número real diferente de cero.
--------------------------	---

“La **función constante** tiene la propiedad de que a cada argumento x del dominio le hace corresponder la misma imagen k ”.



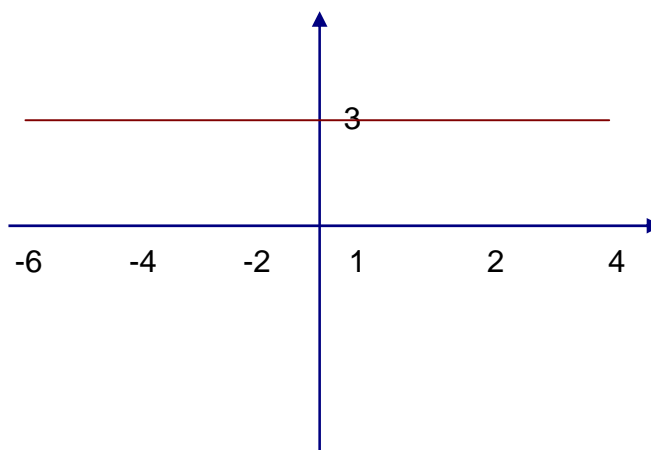
1. La gráfica de la función constante conlleva a una recta horizontal que dista k unidades del eje x , por arriba si $k > 0$, o por abajo si $k < 0$. Figura 21
2. El grado de esta función es 0.
3. Su contradominio es en conjunto unitario $\{k\}$.
4. No tiene raíces.



Ejemplo: Grafica las siguientes funciones constantes en el conjunto de puntos indicado

1. $f(x) = 3$

x	y = 3
-5	3
-4	3
-3	3
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3
3	3
4	3
5	3



Función Lineal.

Definición:

Función Lineal	La función lineal se define como una expresión de la forma $f(x) = mx + k$
-----------------------	---

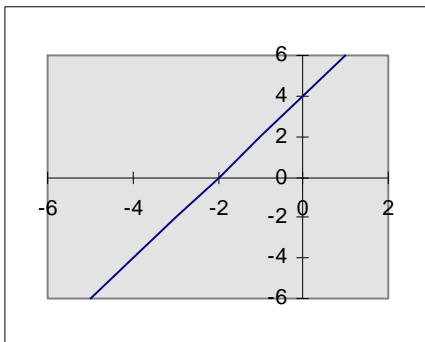
“La **función lineal** es un polinomio de primer grado en el que su contradominio coincide con el dominio, es decir, con \mathbf{R} , y cuya gráfica es una línea recta donde m representa la pendiente de ella, y k el punto donde ésta se intersecta con el eje y ”. Esto lo verificaremos más adelante con los ejercicios.

La función lineal sólo tiene una raíz en el punto $(-k/m, 0)$, pues si $f(x) = 0$, $mx + k = 0$, de donde, despejando $mx = -k$, y finalmente, $x = -k/m$.

La m representa la *pendiente* de la recta y k , el intercepto con el eje y ; solo basta con calcular las coordenadas de dos de los puntos para trazar la gráfica de una función lineal.

FUNCIÓN	DOMINIO	CONTRADOMINIO
$f(x) = mx + k$	Todo número real $-\infty < x < \infty$	Todo número real $-\infty < x < \infty$

Ejemplo 1: Traza la gráfica de la función $f(x) = 2x + 4$



En la función $f(x) = 2x + 4$, la pendiente es 2, por tanto la gráfica es creciente en los números reales. El dominio y el recorrido es el conjunto de los números reales. El intercepto en y es $(0,4)$.

Ejemplo 2. Traza la gráfica de la función $f(x) = 3x - 6$

x	y = 3x - 6
-4	-18
-3	-15
-2	-12
-1	-9
0	-6
1	-3
2	0
3	3
4	6

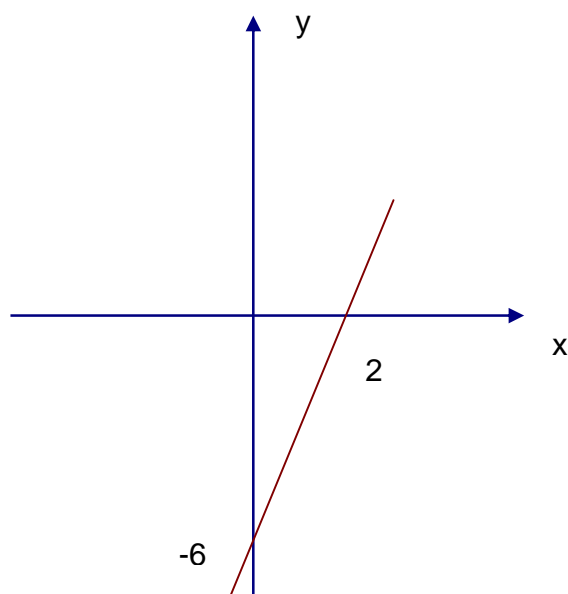
Raíz

$$3x - 6 = 0$$

$$3x = 6$$

$$x = 6/3$$

$$x = 2$$



Resumen:

1. Si m es positiva ($m > 0$), el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje x es agudo.
2. Si m es negativa ($m < 0$), el ángulo es obtuso.

Función Cuadrática.

Definición:

Función Cuadrática. La función cuadrática es un polinomio de segundo grado. Tiene la

forma $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y de la cual podemos obtener dos, una o ninguna raíz real dependiendo del discriminante $b^2 - 4ac$ bajo las siguientes condiciones.

$$b^2 - 4ac \begin{cases} > 0 \text{ da lugar a dos raíces reales distintas.} \\ = 0 \text{ da lugar a dos raíces reales iguales.} \\ < 0 \text{ no da lugar a raíces reales.} \end{cases}$$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$, o abre hacia abajo si $a < 0$.

El dominio de una función cuadrática es el conjunto de los números reales.

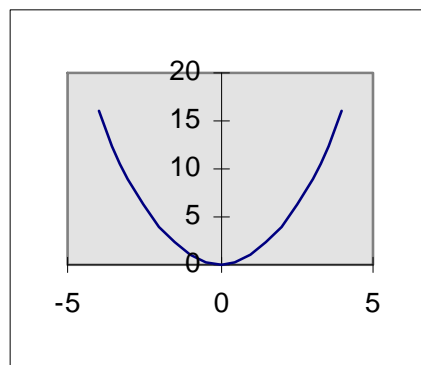
El contradominio de esta función es el conjunto de números y tales que $y \geq k$ si $a > 0$, o bien $y \leq k$ si $a < 0$, donde k es la ordenada del vértice de la parábola.

El vértice de la parábola se determina por la fórmula:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right).$$

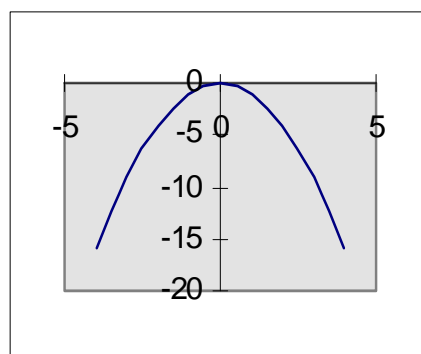
Ejemplo 1. Determina el dominio y el contradominio de la función $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola que abre hacia arriba, pues $a > 0$. El vértice es $(0,0)$. El dominio es el conjunto de los números reales y el recorrido es cero y los reales positivos ($y \geq 0$).



Ejemplo 2.- Determina el dominio y el contradominio de la función $f(x) = -x^2$

$f(x) = -x^2$ es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola que abre hacia abajo, pues $a < 0$. El vértice es $(0,0)$. El dominio es el conjunto de los números reales y el recorrido es el conjunto de los números reales negativos y el cero ($y \leq 0$).



Ejemplo 3. Grafica las siguientes funciones cuadráticas y calcula sus raíces.

1. $f(x) = 2x^2 - 8x - 24$

x	y = 2x ² -8x-24
-4	40
-3	18
-2	0
-1	-4
0	-24
1	-30
2	-32
3	-30
4	-24
5	-4
6	0
7	18
8	40

Raíces

$$2x^2 - 8x - 24 = 0$$

$$a = 2, b = -8, c = -24$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(-24)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{4}$$

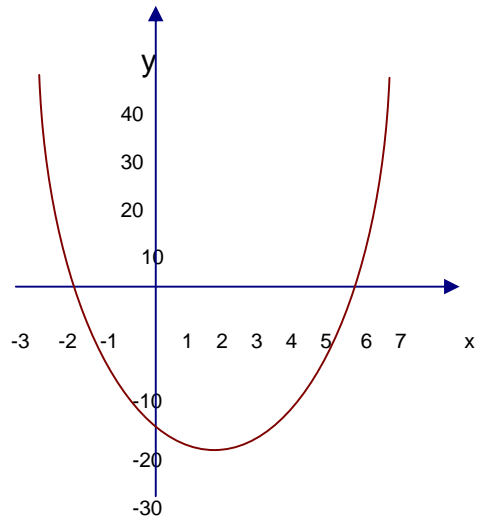
$$x = \frac{8 \pm 16}{4}$$

$$x_1 = \frac{24}{4}$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = \frac{-8}{4}$$

$$x_2 = -2$$



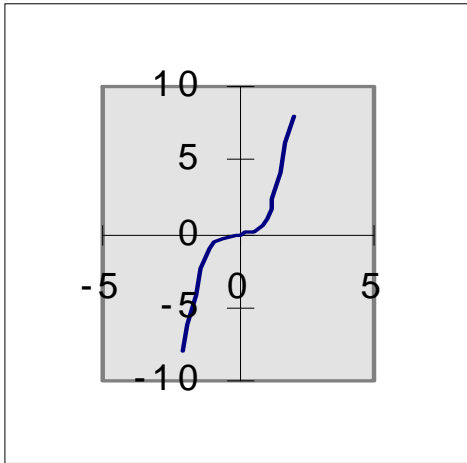
Función Cúbica.

Definición:

Función cúbica: La función cúbica se define como polinomio de tercer grado; tiene la forma: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$.

FUNCIÓN	DOMINIO	CONTRADOMINIO
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$	Todo número real $-\infty < x < \infty$	Todo número real $-\infty < x < \infty$

Ejemplo 1: Realiza la gráfica de la función $y = x^3$



x	$y = x^3$
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

RESUMEN DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES

GRADO	FUNCIÓN	DEFINICIÓN	DOMINIO	CONTRADOMINIO	CARACTERÍSTICAS
0	Constante	$f(x) = k$	R	{k}	Asigna a cada argumento la misma imagen k. Recta horizontal. No tiene raíces.
1	Identidad	$f(x) = x$	R	R	Asocia a cada argumento del dominio el mismo valor en el contradominio. Recta que pasa por el origen con un ángulo de 45° . Raíz en el punto $x = 0$.
1	Lineal	$f(x) = mx + k$	R	R	Recta con inclinación aguda si $m > 0$ y obtusa si $m < 0$. Raíz en el punto $x = -k/m$.
2	Cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$	R	$y \geq k$ si $a > 0$ $y \leq k$ si $a < 0$	Parábola cuya ordenada del vértice es k. Raíces dadas por la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
3	Cúbica	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	R	R	Tiene al menos una raíz real.