LA PARÁBOLA

CONTENIDO

Esta ***cónica*** llamada ***parábola***, se describe geométricamente como la curva que resulta al interceptar un ***cono recto circular*** y un ***plano paralelo a la generatriz*** del ***cono***. Ver ***Figura 1***

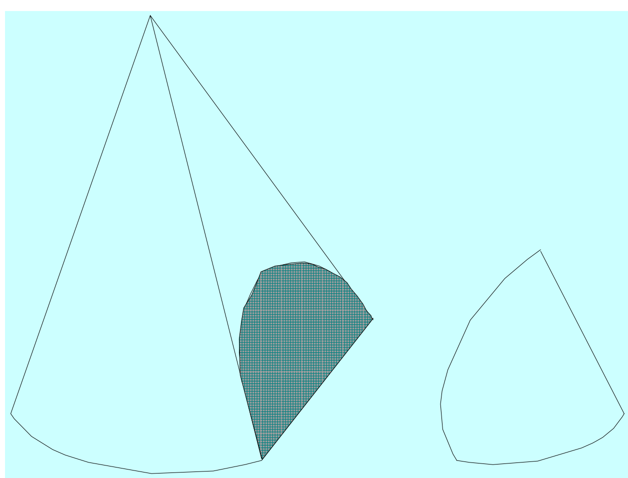

Figura 1

Definición: La ***parábola*** es el ***lugar geométrico*** de todos los puntos de un plano que participan de la propiedad de ***equidistar*** de un punto fijo llamado ***foco*** y de una recta fija, que no pasa por el punto, llamada ***directriz***.

Elementos de la parábola: Al punto fijo llamado ***foco*** lo representaremos con **F**, a la recta

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

fija llamada ***directriz*** con $\overline{DD'}$. La distancia entre el ***foco*** y la ***directriz*** lo representamos por **p**, en donde **p>0**. El ***vértice*** de la ***parábola*** con **V**

La recta perpendicular a la ***directriz*** y que pasa por el ***foco*** y por el punto de la ***parábola*** llamado ***vértice*** (**V**), se llama ***eje*** de la ***parábola***. La posición del ***eje*** determina la posición de la ***parábola***. La ***parábola*** siempre es simétrica con respecto a su propio ***eje***.

De acuerdo a la definición de la ***parábola***, el punto medio entre la ***directriz*** y el ***foco*** pertenece al ***lugar geométrico*** y se llama ***vértice***.

Directriz de la ***parábola*** es la recta perpendicular al ***eje*** de la ***parábola*** y está a la misma distancia del ***vértice*** que el **vértice** del ***foco***.

1 Ecuación de la parábola horizontal con vértice en el origen.

Empezaremos haciendo que el ***vértice*** coincida con el ***origen*** del sistema de coordenadas y que el ***eje*** de la ***parábola*** sea el eje de las **x**. Ver ***Figura 2***.

Puesto que la distancia de la ***directriz*** al ***foco*** es **p**, las coordenadas del ***foco*** son $F(\frac{p}{2},0)$ y la ecuación de la ***directriz*** es $x=-\frac{p}{2}$ (***Figura 2***). Consideramos un punto ***M(x, y)*** del ***lugar geométrico***, trazamos una recta $\overline{QM}$ perpendicular a la ***directriz***, paralela al eje de las **x**, por lo que las coordenadas de **Q** son $(-\frac{p}{2},y)$; después se traza la recta $\overline{MF}$.

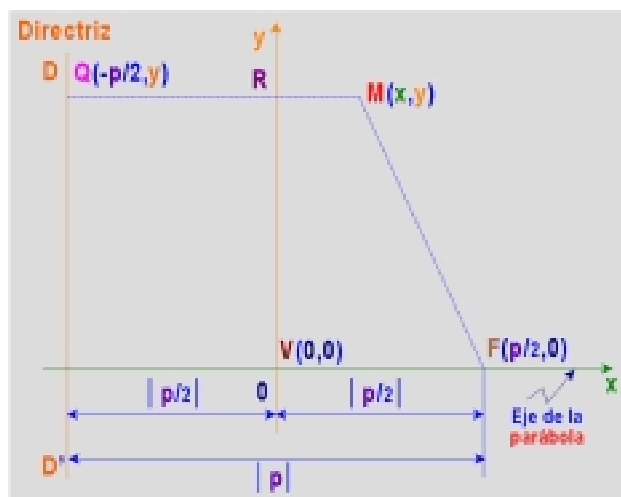

Figura 2

De acuerdo a la definición de la ***parábola***, la condición de movimiento de ***M*** es:

$$\overline{MF}=\overline{QM} \qquad (1)$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$$\overline{MF}=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$$

Y de acuerdo a la ***Figura 2***:

$$\overline{QM}=\overline{RM}+\overline{QR}$$

En donde:

$$\overline{RM} = x$$

$$\overline{QR} = \frac{p}{2}$$

Por lo que:

$$\overline{QM} = x + \frac{p}{2}$$

Sustituyendo en **(1)** estos valores, se tiene:

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

Elevando al cuadrado y desarrollando:

$$\left[\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\right]^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - p\,x + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + p\,x + \frac{p^2}{4}$$

Simplificando y despejando a y^2:

$$\mathbf{y^2 = 2\,p\,x} \quad \text{..} \quad \mathbf{(I)}$$

1.1. Análisis de la ecuación.

Considerando totalmente desconocida la forma de la curva, así como su posición y sus características principales debemos analizar la ecuación **(I)**, para obtener ese conocimiento. conviene despejar a cada una de las variables de la ecuación, por lo que:

$$\mathbf{y = \pm\sqrt{2\,p\,x}} \quad \text{..} \quad (\alpha)$$

$$\mathbf{x = \frac{y^2}{2\,p}} \quad \text{..} \quad (\beta)$$

El **análisis** de la ecuación consta de las siguientes fases:

Primera: **Saber** si la curva es ***simétrica*** o ***asimétrica***. La ecuación **(α)** demuestra que la curva es ***simétrica*** con relación al eje de las ***abscisas***, porque para un valor de **x** se obtienen dos valores de **y** iguales y de signos contrarios. En cambio, la curva es ***asimétrica*** con relación al eje de las ***ordenadas***, porque según la ecuación **(β)**, para cada valor de **y** sólo se obtiene un valor de **x**.

Segunda: **Determinar** los puntos de ***intersección*** de la curva con los ejes de coordenadas. Si **x=0**, resulta **y=0**, lo cual significa que el único punto común de la curva con los ejes es el origen del sistema de coordenadas.

Tercera: **Determinar** las zonas donde ***existe*** y donde deja de existir la curva. La ecuación **(α)** permite ver que cuando el parámetro ***p*** es ***positivo***, la variable **x** sólo debe recibir valores ***positivos*** porque de otro modo los de **y** resultan ***imaginarios***. Esto significa que, cuando ***p>0***, la curva solamente ***existe*** a la ***derecha*** del origen del sistema y la región ***izquierda*** es zona ***imaginaria*** de la ***parábola***. En cambio, si ***p<0***, la ecuación solamente ***existe*** a la ***izquierda*** del origen del sistema.

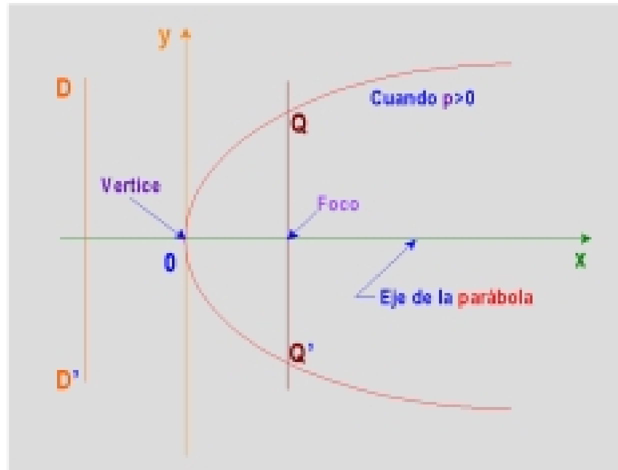

Figura 3

Cuarta: **Investigar** si la curva es ***abierta*** o ***cerrada***. La misma ecuación **(α)** justifica que la curva es ***abierta***, porque si **x** aumenta indefinidamente, también **y** aumenta en la misma condición.

En **síntesis**, la ***parábola*** tiene la forma aproximada que se muestra en la ***Figura 3***.

En ambos casos la ecuación es de la forma **(I)** y se dice que la parábola es ***horizontal*** con ***vértice*** en el ***origen***.

LADO RECTO

Se llama **ancho focal** o **latus rectum** de la ***parábola***, la magnitud del segmento de recta $\overline{QQ'}$ perpendicular al ***eje*** de la ***parábola*** que pasa por el ***foco***. Para calcularlo se hacen simultáneas la ecuación $x = \frac{p}{2}$ con la ecuación de la ***parábola*** $y^2 = 2\,p\,x$, obteniéndose así que:

$$y^2 = 2p\frac{p}{2} = p^2$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\mathbf{y = \pm p}$$

Por lo tanto:

$$\textbf{Ancho focal o lado recto} = \overline{QQ'} = 2p$$

A la distancia que hay entre el ***foco*** de una ***parábola*** y cualquier punto de la misma, se llama **radio focal**.

1.2 Ejercicios

1. **Encontrar** las coordenadas del ***foco*** y la ecuación de la ***directriz*** para la ***parábola*** cuya ecuación es $y^2 = 8x$.

SOLUCIÓN

Comparando con la ecuación **(I)**, tenemos:

$$2p = 8$$
$$p = \frac{8}{2} = \mathbf{4}$$
$$\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

Entonces, las coordenadas del ***foco*** son:

$$\mathbf{F(2,0)}$$

Y la ecuación de la ***directriz*** es:

$$\mathbf{x = -\frac{p}{2} = -2}$$

2. **Encontrar** las coordenadas del ***foco*** y la ecuación de la ***directriz*** para la ***parábola*** con ecuación $y^2 = -16x$.

SOLUCIÓN

Comparando la ecuación dada con la ecuación **(I)**, tenemos:

$$2p = -16$$
$$\mathbf{p} = -\frac{16}{2} = \mathbf{-8}$$
$$\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}} = \frac{-8}{2} = \mathbf{-4}$$

Como **p** es negativo, entonces las ramas de la ***parábola*** son hacia la izquierda, por lo que las coordenadas del ***foco*** son:

$$\mathbf{F(-4,0)}$$

Y la ecuación de la ***directriz*** es:

$$x = 4$$

3. Una ***parábola*** horizontal con ***vértice*** en el ***origen*** pasa por el punto ***A(-2,4)***. **Determinar** su ecuación.

SOLUCIÓN

Dicha ecuación debe tener la forma de la fórmula **(I)** y las coordenadas del punto deben verificarla, por lo que:

$$16 = 2p(-2)$$

$$2p = \frac{16}{-2} = -8$$

$$\mathbf{p = -4}$$

$$\mathbf{\frac{p}{2} = -2}$$

La ecuación de la ***parábola*** es:

$$\mathbf{y^2 = -8x}$$

La gráfica se muestra en la ***Figura 4***.

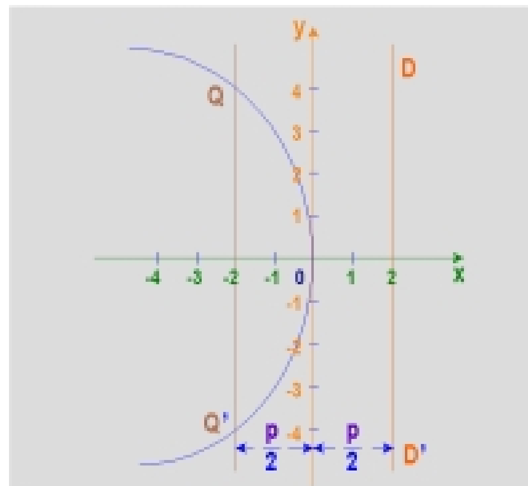

Figura 4

2 Ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen.

Para encontrar la ecuación de la ***parábola vertical*** con ***vértice*** en el ***origen*** del sistema ***V(0,0)***, previamente necesitamos hacer constar que la ecuación ya conocida $\mathbf{y^2 = 2px}$, también se puede expresar de acuerdo con la ***Figura 5***:

Ya sabemos que:

$$y^2 = 2px$$

Pero de acuerdo a la ***Figura 5*** tenemos:

$$(\overline{BM})^2 = 2p\ \overline{AM}$$

Se observa en dicha ***Figura 5*** que, $\overline{\mathbf{BM}}$ representa la distancia de un punto cualquiera de la curva a su eje de simetría, en tanto $\overline{\mathbf{AM}}$ es la distancia del mismo punto cualquiera a la perpendicular al eje que pasa por el ***vértice***.

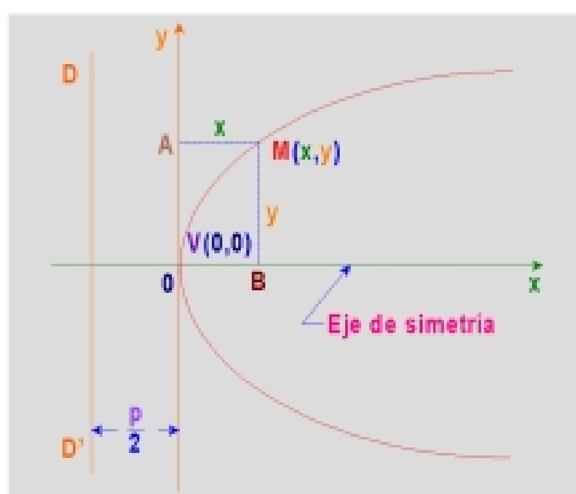

Figura 5

AUTOR: **PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO**
EDICIÓN PARA INTERNET: **PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS**

Primer método.

Esta manera de escribir la ecuación y los significados de los segmentos $\overline{BM}$ y $\overline{AM}$, nos permitirán deducir la ecuación de la ***parábola vertical*** con ***vértice*** en el ***origen*** y las correspondientes a otras posiciones de la ***parábola***.

Apoyándonos en la ***Figura 6*** y aplicando los conceptos anteriores, para este caso se tiene:

$$(\overline{QM})^2 = 2p\,\overline{RM}$$

Pero:

$$\overline{QM} = x \quad y \quad \overline{RM} = y$$

Sustituyendo en la expresión anterior se tiene:

$$x^2 = 2\,p\,y \qquad \textbf{(II)}$$

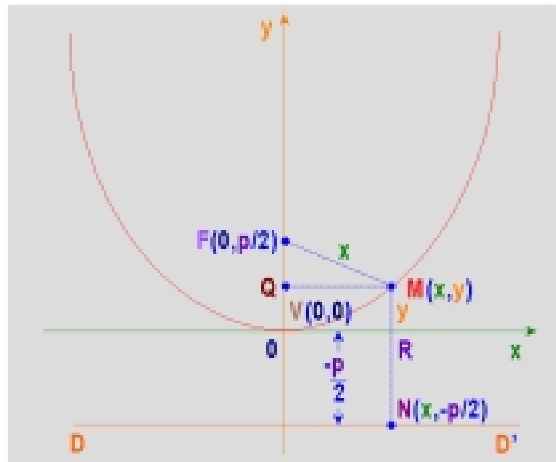

Figura 6

Segundo método.

Por otra parte, basándose en la ***Figura 6*** y de acuerdo a la definición de la ***parábola***, tenemos:

$$\overline{MN} = \overline{MF} \quad \text{...} \textbf{(1)}$$

Aplicando la expresión para determinar la distancia entre dos puntos, obtenemos:

$$\overline{MN} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+\frac{p}{2})^2} = \sqrt{(y+\frac{p}{2})^2}$$

$$\overline{MF} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{p}{2})^2} = \sqrt{x^2 + (y-\frac{p}{2})^2}$$

Sustituyendo en la ecuación **(1)**:

$$\sqrt{(y+\frac{p}{2})^2} = \sqrt{x^2 + (y-\frac{p}{2})^2}$$

Elevando al cuadrado:

$$\left[\sqrt{(y+\frac{p}{2})^2}\right]^2 = \left[\sqrt{x^2 + (y-\frac{p}{2})^2}\right]^2$$

Desarrollando:

$$(y+\frac{p}{2})^2 = x^2 + (y-\frac{p}{2})^2$$

$$y^2 + 2\frac{p}{2}y + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - 2\frac{p}{2}y + \frac{p^2}{4}$$

Simplificando:

$$p\,y = x^2 - p\,y$$

Despejando a x^2:

$$x^2 = 2\,p\,y \quad \text{...}(II)$$

Como se ve, hemos obtenido la misma ecuación **(II)** de la ***parábola vertical*** con ***vértice*** en el ***origen*** del sistema de ejes cartesianos.

En donde también se cumple que si el parámetro **p** es ***positivo***, la concavidad de la curva está dirigida hacia ***arriba*** y, si es ***negativo***, hacia ***abajo***, con ***vértice*** en ***(0,0)***, ***foco*** en ***(0,p/2)*** y ecuación de la ***directriz*** $y = -\frac{p}{2}$.

2.1 Ejercicios

1. **Encontrar** las coordenadas del ***foco*** y la ecuación de la ***directriz*** para la ***parábola*** $x^2 = 6\,y$.

SOLUCIÓN

Comparando la ecuación dada con la fórmula **(II)**, tenemos que:

$$2p = 6$$

$$p = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{p}{2} = \frac{3}{2}$$

Entonces, las coordenadas del ***foco*** son:

$$F\left(0, \frac{3}{2}\right)$$

Y la ecuación de la ***directriz*** es:

$$y = -\frac{3}{2}$$

2. **Escribir** la ecuación de la **parábola** con ***foco*** en ***F(0,5)*** y cuya ecuación de la ***directriz*** es $\mathbf{y = -5}$.

SOLUCIÓN

Como el ***foco*** está sobre el eje y, indica que es una ***parábola vertical*** con ***vértice*** en el ***origen***, por lo que la forma de la ecuación está dada por la fórmula **(II)**.

Además, por definición $\frac{p}{2}$ es la distancia del ***vértice*** al ***foco***, por lo que $\frac{p}{2} = 5$.

Por tanto, $\mathbf{p = 10}$ y $\mathbf{2p = 20}$, lo que sustituido en la ecuación, se tiene:

$\mathbf{x = 20y}$

3. Una ***parábola*** de eje ***vertical***, ***vértice*** en el ***origen***, tiene su ***foco*** en el punto ***F(0,2)***. **Determinar** su ecuación.

SOLUCIÓN

La forma de la ecuación es igual a la fórmula **(II)**. En este problema, según datos:

$$\frac{p}{2} = 2$$

$$p = 4$$

$$\mathbf{2p = 8}$$

Así que la ecuación es:

$\mathbf{x^2 = 8y}$

3. Ecuación de la *parábola* horizontal con vértice fuera del origen.

Las ecuaciones de la ***parábola*** vistas anteriormente, son válidas solamente en el caso de que el ***vértice*** esté en el ***origen*** y que el eje de ***simetría*** de la ***parábola*** sea el eje x o el eje y.

Veamos el caso en que el ***vértice*** está en un punto cualquiera que no es el origen y que el eje de ***simetría*** de la ***parábola*** es paralelo al eje x.

Primer método.

Para deducir la ecuación correspondiente, nos apoyaremos en la definición de la ***parábola***. El ***vértice*** está ahora en ***V(h, k)*** y la distancia del ***vértice*** al ***foco*** y del ***vértice*** a la ***directriz*** sigue siendo $\mathbf{\frac{p}{2}}$, como se ve en la ***Figura 7***:

De la ***Figura 7*** y de acuerdo a la definición, tenemos .

$$\mathbf{\overline{MN} = \overline{MF}} \qquad \textbf{(1)}$$

Aplicando la ecuación de la distancia entre dos puntos, tenemos:

$$\overline{MN}=\sqrt{\left[x-\left(h-\frac{p}{2}\right)\right]^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left[x-\left(h-\frac{p}{2}\right)\right]^2+0}$$

$$\overline{MF}=\sqrt{\left[x-\left(h+\frac{p}{2}\right)\right]^2+(y-k)^2}$$

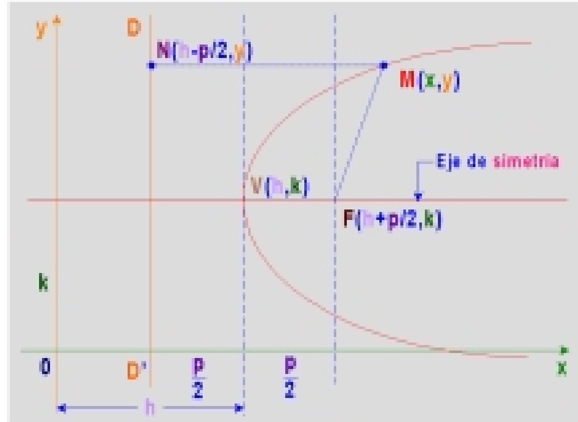

Figura 7

Sustituyendo en **(1)** y elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\left[x-\left(h-\frac{p}{2}\right)\right]^2=\left[x-\left(h+\frac{p}{2}\right)\right]^2+(y-k)^2$$

$$\left(x-h+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-h-\frac{p}{2}\right)^2+(y-k)^2$$

Desarrollando:

$$x^2+h^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2-2hx+2\frac{p}{2}x-2\frac{p}{2}h=x^2+h^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2-2hx-2\frac{p}{2}x+2\frac{p}{2}h+(y-k)^2$$

Simplificando:

$$x^2+h^2+\frac{p^2}{4}-2hx+px-ph=x^2+h^2+\frac{p^2}{4}-2hx-px+ph+(y-k)^2$$

Reduciendo términos semejantes:

$$2px-2ph=(y-k)^2$$

$$2p(x-h)=(y-k)^2$$

Finalmente, rearreglando la ecuación anterior:

$(y-k)^2=2p(x-h)$ .... **(III)**

Es la ecuación de una ***parábola horizontal*** con ***vértice*** en (h,k), ***foco*** en $\left(h+\frac{p}{2},k\right)$ y ecuación de la ***directriz*** $x=h-\frac{p}{2}$.

Segundo método.

Otra forma de obtener la ecuación de la ***parábola*** ***horizontal*** con ***vértice*** ***fuera*** del ***origen*** es aplicando los significados de los segmentos $\overline{BM}$ y $\overline{AM}$ vistos con anterioridad y que aplicados a la ***Figura 8***, tenemos:

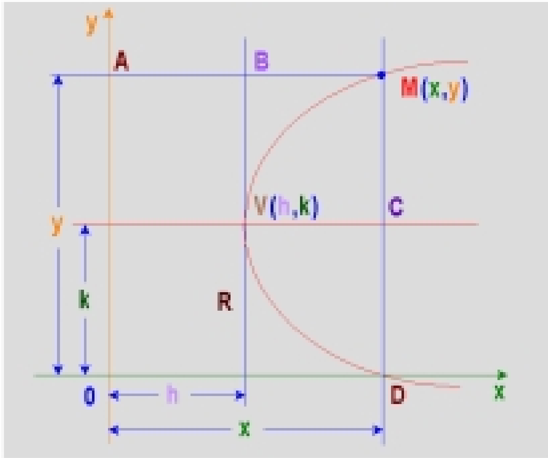

Figura 8

$$(\overline{CM})^2 = 2p\ \overline{BM}$$

Solamente que en la ***Figura 8*** se tiene:

$$\overline{CM} = \overline{DM} - \overline{DC} = y - k$$
$$\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} = x - h$$

Así que la ecuación es:

$$(y-k)^2 = 2p(x-h) \quad \text{.........} \quad \textbf{(III)}$$

Es decir que, hemos obtenido la misma ecuación ordinaria **(III)** de la ***parábola*** ***horizontal*** con ***vértice*** en ***V*(*h*, *k*)**.

4 Ecuación de la parábola vertical con vértice fuera del origen.

Obtendremos ahora la ecuación de la ***parábola*** ***vertical*** con ***vértice*** **fuera** del ***origen***, de acuerdo a la siguiente ***Figura 9***:

Primer método.

De la definición de la ***parábola***, tenemos que:

$$\overline{MN} = \overline{MF} \quad \text{.........} \quad \textbf{(1)}$$

Aplicando la fórmula para la distancia entre dos puntos:

$$\overline{MN} = \sqrt{(x-x)^2 + \left[y - \left(k - \frac{p}{2}\right)\right]^2} = \sqrt{0 + \left[y - \left(k - \frac{p}{2}\right)\right]^2} = \sqrt{\left[y - \left(k - \frac{p}{2}\right)\right]^2}$$

$$\overline{MF} = \sqrt{(x-h)^2 + \left[y - \left(k + \frac{p}{2}\right)\right]^2}$$

Sustituyendo en **(1)**:

$$\sqrt{\left[y - \left(k - \frac{p}{2}\right)\right]^2} = \sqrt{(x-h)^2 + \left[y - \left(k + \frac{p}{2}\right)\right]^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(y-k+\frac{p}{2}\right)^2=(x-h)^2+\left(y-k-\frac{p}{2}\right)^2$$

Desarrollando:

$$y^2+k^2+\frac{p^2}{4}-2ky+2\frac{p}{2}y-2\frac{p}{2}k = (x-h)^2+y^2+k^2+\frac{p^2}{4}-2ky-2\frac{p}{2}y+2\frac{p}{2}k$$

Simplificando:

$$-2ky+py-pk=(x-h)^2-2ky-py+pk$$
$$2py-2pk=(x-h)^2$$
$$2p(y-k)=(x-h)^2$$

Rearreglando la ecuación:

$$\mathbf{(x-h)^2=2p(y-k)} \qquad \textbf{(IV)}$$

Esta es la ecuación de una ***parábola vertical*** con ***vértice*** en $\mathbf{(h,k)}$, ***foco*** en $\left(\mathbf{h,k+\frac{p}{2}}\right)$ y ecuación de la ***directriz*** $\mathbf{y=k-\frac{p}{2}}$.

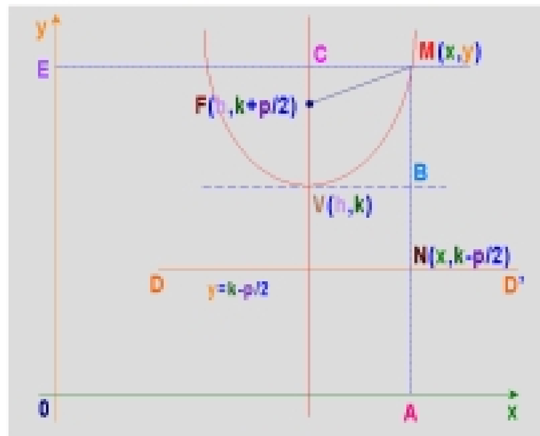

Figura 9

Segundo método.

De acuerdo a la ***Figura 9*** y el significado de los segmentos $\mathbf{\overline{BM}\ y\ \overline{AM}}$ ya vistos y aplicados. En este caso tenemos que la expresión $\mathbf{x^2=2py}$, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\overline{CM}^2=2p\,\overline{BM} \text{ .... } \textbf{(1)}$$

Pero:

$$\overline{CM}=\overline{DM}-\overline{CD}=x-h$$
$$\overline{BM}=\overline{AM}-\overline{AB}=y-k$$

Sustituyendo en **(1)**:

$$\mathbf{(x-h)^2=2p(y-k)} \text{ .... } \textbf{(IV)}$$

Como se ve hemos obtenido la misma ecuación **(IV)**.

En estos dos últimos casos sigue siendo verdad que del signo del parámetro **p**, depende hacía donde está dirigida la ***concavidad*** de la curva.

Así mismo en los **cuatro** casos tratados, la ecuación representativa de la ***parábola*** solamente contiene una de las variables a la segunda potencia, pues la otra aparece a la primera.

5 Forma general de las ecuaciones de la parábola horizontal y vertical con vértice fuera del origen.

Las ecuaciones ordinarias **(III)** y **(IV)** que hemos obtenido de la ***parábola horizontal*** y ***vertical*** con ***vértice fuera*** de ***origen*** del sistemas cartesiano, las expresaremos cada una de ellas en su ***forma general***, como se ve en seguida.

Desarrollando la ecuación común, de la ***parábola horizontal*** tenemos:

$$(y-k)^2 = 2p(x-h)$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 2px - 2ph$$

$$\mathbf{y^2 - 2px - 2ky + k^2 + 2ph = 0} \quad \text{..........} \quad \mathbf{(1)}$$

La comparamos con la ecuación general de segundo grado.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Podemos observar que:

$\mathbf{A} = 0$	$\mathbf{D} = -2p$
$\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} = -2k$
$\mathbf{C} = 1$	$\mathbf{F} = k^2 + 2ph$

Sustituyendo estos valores en la ecuación **(1)** se tiene:

$$\mathbf{y^2 + Dx + Ey + F = 0} \quad \text{..........} \quad \mathbf{(V)}$$

Que es la ***forma general*** de la ecuación de la ***parábola horizontal***.

De la misma forma para la ***parábola vertical*** partimos de:

$$(x-h)^2 = 2p(y-k) \quad \text{..........} \quad \mathbf{(2)}$$

Desarrollando:

$$x^2 - 2hx - 2py + h^2 + 2pk = 0$$

Comparando con la ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se tiene:

A $= 1$	**D** $= -2h$
B $= 0$	**E** $= -2p$
C $= 1$	**F** $= h^2 + 2ph$

Sustituyendo en la ecuación **(2)**.

$$\mathbf{x^2 + Dx + Ey + F = 0} \quad \text{.......................} \quad \textbf{(VI)}$$

Que es la ***forma general*** de la ecuación de la ***parábola vertical***.

6. Ejercicios

1. **Hallar** el ***vértice***, ***lado recto***, ***foco***, *ecuación de la **directriz*** y **trazar** la gráfica de la ***parábola*** cuya ecuación es: $\mathbf{x^2 - 4x - 4y - 4 = 0}$.

SOLUCIÓN

Completando el trinomio cuadrado perfecto en **x** para encontrar los elementos pedidos:

$$x^2 - 4x = 4y + 4$$
$$(x^2 - 4x + 4 - 4) = 4y + 4$$
$$(x - 2)^2 = 4y + 8$$
$$\mathbf{(x - 2)^2 = 4\ (y + 2)}$$

Que es la ecuación de una ***parábola vertical*** con ***vértice*** fuera del ***origen***, en la cual:

V(2,–2); lado recto $= 2p = 4$

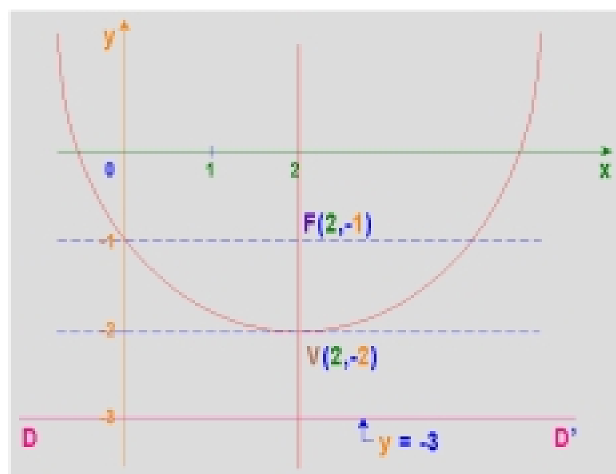

Figura 10

Por tanto:

$$\mathbf{p = \frac{4}{2} = 2} \quad \text{y} \quad \mathbf{\frac{p}{2} = 1}$$

Por lo que la ecuación de la ***directriz*** es:

$$\mathbf{y} = k - \frac{p}{2} = -\ 2 - 1 = \mathbf{-3}$$

Y las coordenadas del ***foco*** son:

$$F\left(h,k+\frac{p}{2}\right);\quad F(2,-2+1);\quad \mathbf{F(2,-1)}$$

La ***Figura 10*** muestra gráficamente los resultados obtenidos.

2. **Determinar** la ecuación de la ***parábola*** de eje ***vertical***, con ***vértice*** en el punto ***V(-2,2)***, sabiendo que pasa por el punto ***A(1,-3)***.

SOLUCIÓN

La forma de la ecuación es la dada por la fórmula **(IV)**. Como $\mathbf{h}=-\mathbf{2}$ y $\mathbf{k}=\mathbf{2}$, según datos del ***vértice V***, tendremos:

$$(x+2)^2=2p(y-2)$$

Las coordenadas del punto ***A*** deben satisfacer la ecuación anterior, es decir:

$$(1+2)^2=2p(-3-2)$$
$$9=2p(-5)$$

Por tanto:

$$\mathbf{2p}=-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}$$

Sustituyendo en la fórmula **(IV)**, se obtiene la ecuación de la ***parábola*** pedida:

$$\mathbf{(x+2)^2=-\frac{9}{5}(y-2)}$$

3. **Demuestre** que $\mathbf{y^2=3x+2y-4}$ es la ecuación de una ***parábola***. **Determínese** su ***ancho focal***, su ***vértice***, su ***foco*** y la ecuación de su ***directriz***.

SOLUCIÓN

En la ecuación dada, basta observar que solamente una de las variables aparece elevada a la segunda potencia para asegurar que la ecuación sí representa una ***parábola***. Sin embargo, para mayor seguridad podemos llevarla a la forma tipo, que además servirá para determinar los elementos solicitados.

Completando el trinomio cuadrado perfecto en **y**, se tiene:

$$y^2-2y+1-1=3x-4$$
$$(y-1)^2=3x-3=3(x-1)$$

En donde:

$$\textbf{Ancho focal} = 2p = 3$$
$$\textbf{Vértice}: B(1,1)$$
$$p = \frac{3}{2}. \text{ Por tanto}: \frac{p}{2} = \frac{3}{4}$$
$$\textbf{Foco}: F\left(\frac{7}{4}, 1\right)$$

La ecuación de la *directriz* es: $x = \frac{1}{4}$

La *Figura 11* muestra gráficamente los resultados obtenidos.

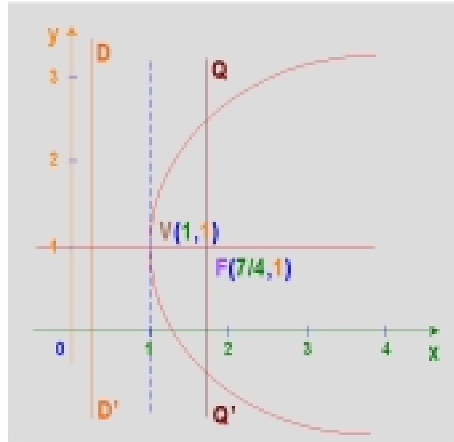

Figura 11

4. La *directriz* de una *parábola* es el eje de las x y su *foco* es el punto *F(a,0)*. **Encontrar** su ecuación.

SOLUCIÓN

La ecuación debe ser de la forma expresada en la fórmula **(III)**, para la cual, según los datos, se tiene:

$$h = \frac{a}{2} \quad ; \quad k = 0 \quad ; \quad p = a$$

Sustituyendo en la fórmula **(III)**, se obtiene la ecuación de la *parábola* pedida:

$$y^2 = 2a\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

5. Los puntos de una curva tienen la siguiente propiedad: su *ordenada* más $\frac{3}{2}$ es igual a su *distancia* al punto $A\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. **Determinar** qué clase de curva es.

SOLUCIÓN

Sea *M(x, y)* un punto cualquiera de la curva a determinar. Entonces, de acuerdo con las propiedades establecidas con el enunciado, se tiene:

$$y + \frac{3}{2} = \overline{MA} = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$y^2 + 3y + \frac{9}{4} = x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$x^2 = 2y + 4$$

Finalmente, rearreglando la ecuación, se obtiene:

$$\mathbf{(x - 0)^2 = 2(y + 1)}$$

Por la ecuación obtenida, vemos que se trata de una ***parábola vertical***, con los siguientes elementos:

Lado Recto = Ancho Focal = 2p =

Vértice : **V(0,–1)**

Foco : **F(0,–1/2)**

Ecuación de la Directriz : $\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

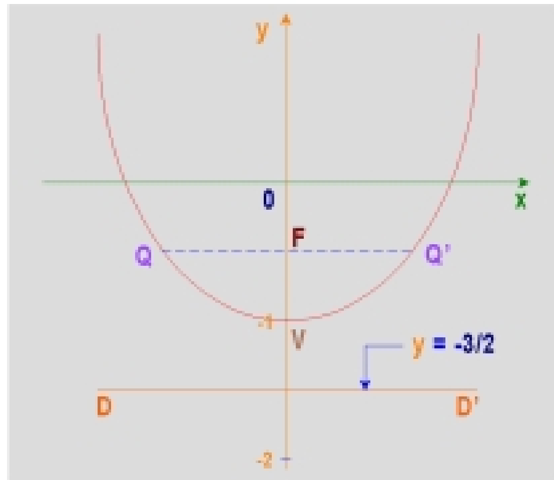

Figura 12

La ***Figura 12***, muestra gráficamente los resultados obtenidos.

6. **Probar** que toda ***parábola*** cuyo eje de ***simetría*** es el eje de las ***abscisas***, tiene una ecuación de la forma $\mathbf{x = a y^2 + b}$. **Determinar** la ecuación particular de la ***parábola*** que pasa por los puntos ***P(3,2)*** y ***Q(-2,-1)***.

SOLUCIÓN

En su forma tipo la ecuación es:

$$y^2 = 2p(x - h)$$

Desarrollando y despejando a **x**, se tiene:

$$y^2 = 2px - 2ph$$
$$2px = y^2 + 2ph$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2p} y^2 + \frac{2ph}{2p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2p}} \mathbf{y^2 + h}$$

Y si convenimos en hacer:

$$\frac{1}{2p} = \mathbf{a} \quad y \quad h = \mathbf{b}$$

Nos queda:

$$x = a y^2 + b$$

Las coordenadas de los puntos ***P*** y ***Q*** deben verificar esta ecuación:

Para ***P***: $3 = 4a + b$ ....**(1)**

Para ***Q***: $-2 = a + b$ ....**(2)**

Restando **(1)** de **(2)** y despejando a **a**, se obtiene:

$$3a = 5$$
$$a = \frac{5}{3}$$

Sustituyendo en **(2)**:

$$b = -\frac{5}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{11}{3}$$

Sustituyendo los valores de **a** y **b,** se obtiene la ecuación particular pedida:

$$x = \frac{5}{3} y^2 - \frac{11}{3}$$
$$3x = 5y^2 - 11$$
$$5y^2 = 3x + 11$$
$$y^2 = \frac{3}{5} x + \frac{11}{5}$$

Finalmente:

$$y^2 = \frac{3}{5}\left(x + \frac{11}{3}\right)$$

Que es la ecuación de la ***parábola*** que pasa por los puntos ***P*** y ***Q***.

7. **Probar** que una ***parábola*** cuyo eje es ***paralelo*** al de las ***ordenadas***, tiene una ecuación de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$ y **encontrar** la ecuación de una ***parábola*** tal que pasa por los puntos: ***O(0,0)***, ***P(1,0)*** y ***Q(3,6)***.

SOLUCIÓN

De la forma común de la ecuación de la ***parábola*** $(x-h)^2 = 2p(y-k)$; desarrollando, reduciendo términos semejantes y despejando a **y**, se tiene:

$$x^2 - 2hx + h^2 = 2py - 2pk$$

$$2py = x^2 - 2hx + h^2 + 2pk$$

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{h}{p}x + \frac{h^2 + 2pk}{2p}$$

Al hacer:

$$\frac{1}{2p} = \mathbf{A} \quad , \quad -\frac{h}{p} = \mathbf{B} \quad y \quad \frac{h^2 + 2pk}{2p} = \mathbf{C}$$

Nos queda:

$$\mathbf{y = A\,x^2 + B\,x + C}$$

Las coordenadas de los tres puntos dados deben verificar esta ecuación:

Para ***O***: $0 = C$ .... **(1)**
Para ***P***: $0 = A + B$ .... **(2)**
Para ***Q***: $6 = 9A + 3B$ .... **(3)**

De **(2)**:

$$B = -A$$

Sustituyendo en **(3)**:

$$9A - 3A = 6$$
$$6A = 6$$
$$\mathbf{A = 1}$$

Sustituyendo **A** en **B**:

$$\mathbf{B = -1}$$

La ecuación solicitada es:

$$\mathbf{y = x^2 - x}$$

8. **Determinar** los puntos donde la recta $\mathbf{2y - x = 4}$ corta a la ***parábola*** $\mathbf{2y - x^2 + 2 = 0}$. **Encontrar** los puntos donde la ***parábola*** corta a los ejes de **coordenadas**. **Comprobar** los resultados construyendo una **gráfica**.

SOLUCIÓN

De las ecuaciones dadas:

$2y - x = 4$ .... **(1)**
$2y - x^2 = -2$ .... **(2)**

Restando **(2)** de **(1)**:

$$-x+x^2=4+2=6$$

Rearreglando la ecuación:

$$x^2-x-6=0$$

Resolviendo la ecuación anterior, se tiene que las raíces son:

$$\mathbf{x_1=3 \quad , \quad x_2=-2}$$

Según la ecuación **(1)**:

$$y=\frac{x+4}{2}$$

Sustituyendo los valores de x_1 y x_2, se obtiene:

$$\mathbf{y_1=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2} \quad ; \quad y_2=\frac{-2+4}{2}=1}$$

Los puntos de ***intersección*** de la recta y la ***parábola*** son:

$$\mathbf{A\left(3,\frac{7}{2}\right)} \quad \text{y} \quad \mathbf{B\,(-2,1)}$$

Según **(2)**:

Para **y=0**:

$$-x^2=-2.\ \text{Por tanto}:\ \mathbf{x=\pm\sqrt{2}}$$

Las ***intersecciones*** de la ***parábola*** con el eje de las **x** son:

$$\mathbf{C\left(\sqrt{2},0\right)\ ,\ D\left(-\sqrt{2},0\right)}$$

Cuando **x=0,** según **(2)**:

$$2y+2=0\ .\ \text{Por tanto}:\ \mathbf{y=-1}$$

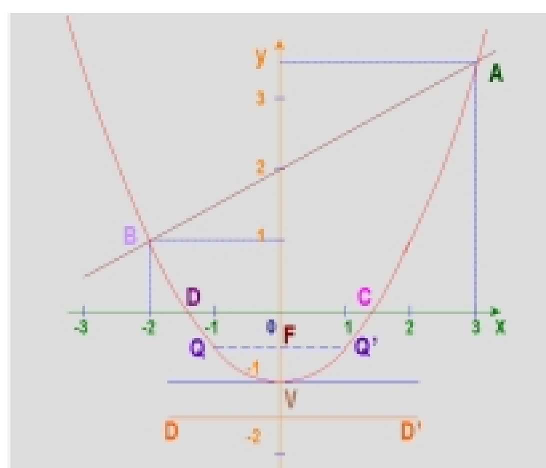

Figura 13

La ***intersección*** de la curva con el eje de las **y** es el ***vértice***:

$$V\ (0,-1)$$

Para hacer la gráfica (***Figura 13***) aproximada, le damos forma tipo a la ecuación de la ***parábola***:

$$-x^2+2y+2=0$$

Por tanto:

$$\mathbf{(x-0)^2=2(y+1)}$$

9. Un ***arco*** tiene la forma de una ***parábola*** con el eje ***vertical***, la ***altura*** de su ***centro*** es de ***10*** *píes* y tiene en su ***base*** un claro de ***30*** *píes*. **Determínese** su **altura** a la distancia de ***5*** *píes* de un extremo.

SOLUCIÓN

Según el enunciado expresamos los datos en la ***Figura 14***.

Según el enunciado y observando la ***Figura 14***, se puede decir que:

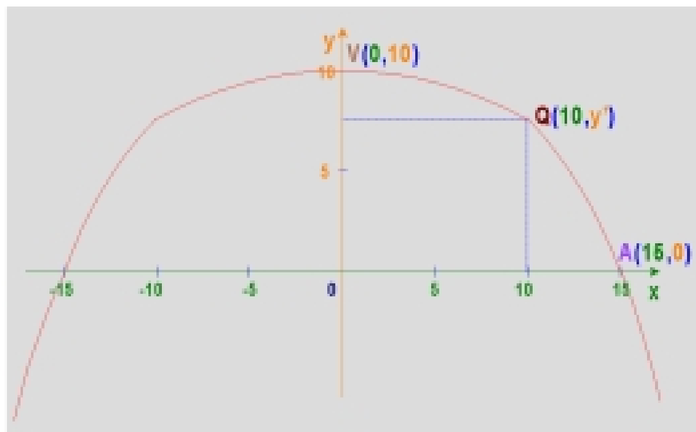

Figura 14

La ecuación de la curva es de la forma:

$$x^2=2p(y-k)$$

Y como ***V(0,10)***, sustituyendo queda:

$$x^2=2p(y-10)$$

Las coordenadas del punto ***A*** deben verificar la ecuación. Sustituyendo:

$$225=2p(-10)$$

$$2p=-\frac{225}{10}=-\frac{45}{2}$$

La ecuación definitiva es:

$$\mathbf{x^2=-\frac{45}{2}(y-10)}$$

Las coordenadas del punto ***Q*** deben verificarla también:

$$100=-\frac{45}{2}(y'-10)$$

$$-\frac{200}{45}=y'-10$$

Despejando a **y'** se obtiene la ***altura*** pedida, o sea:

$$y' = \left(\frac{50}{9}\right)$$

7. Posición general de la parábola y su ecuación.

De acuerdo a la ***Figura 15***, sabemos que:

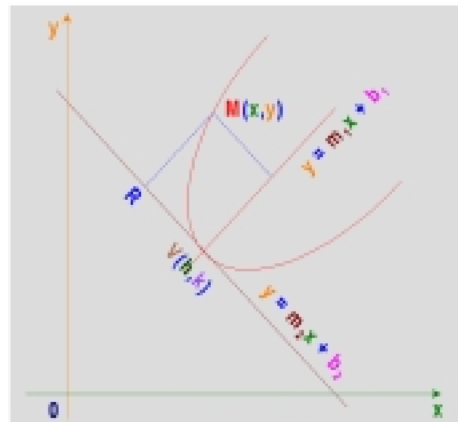

Figura 15

$$\overline{QM}^{\,2} = 2p\,\overline{RM} \qquad \text{(1)}$$

Aplicando la fórmula para la distancia de un punto a una recta dada, se tiene:

$$\overline{QM} = \frac{y - m_1\,x - b_1}{\sqrt{1 + m_1^2}} \quad ; \quad \overline{RM} = \frac{y - m_2\,x - b_2}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

Al sustituir en **(1)** obtenemos la ecuación de la ***parábola*** correspondiente a esta posición general:

$$\left(\frac{y - .m_1 x - b_1}{\sqrt{1 + m_1^2}}\right)^2 = 2p\left(\frac{y - m_2 x - b_2}{\sqrt{1 + m_2^2}}\right) \text{.. } \mathbf{(VII)}$$

Después de efectuar todas las transformaciones del caso, se puede expresar esta ecuación en la siguiente ***forma general***:

$$\mathbf{A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0}$$

La intervención del llamado ***término rectangular*** **xy**, es síntoma seguro de que el eje de ***simetría*** de la ***parábola*** está ***inclinado*** con relación a los ejes del sistema de coordenadas.

EJEMPLO: **Determínese** la ecuación de la ***parábola*** que tiene por ***vértice*** el punto ***V(1,2)***, por eje de ***simetría*** la recta $\mathbf{y = x + 1}$ y que pasa por el punto ***P(3,7)***.

SOLUCIÓN

Haciendo la gráfica (***Figura 16***) se tiene según datos:

La ecuación de la perpendicular al eje de ***simetría*** que pasa por el ***vértice***, es de la forma: $\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$, por lo que para nuestro caso particular, tenemos:

$$y - 2 = -\,(x - 1) = -\,x + 1$$

Por tanto:

$$y = -x + 3$$

Una vez que conocemos la ecuación anterior, sabemos que:

$$\overline{QM}^{\,2} = 2p\,\overline{RM} \qquad (1)$$

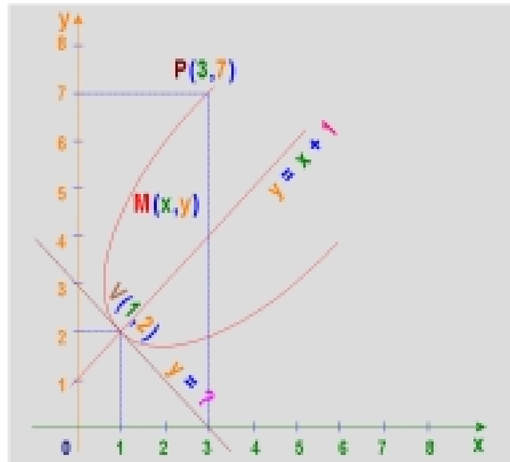

Figura 16

Pero:

$$\overline{QM} = \frac{y - x - 1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \overline{RM} = \frac{y + x - 3}{\sqrt{2}}$$

Sustituimos en **(1)** estos valores:

$$\frac{(y - x - 1)^2}{2} = 2p\left(\frac{y + x - 3}{\sqrt{2}}\right)$$

Las coordenadas del punto ***P*** debe verificarla:

$$\frac{9}{2} = 2p\,\frac{7}{\sqrt{2}}$$

Por tanto:

$$2p = \frac{9\sqrt{2}}{14}$$

La ecuación es:

$$\frac{(y - x - 1)^2}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{14}\left(\frac{y + x - 3}{\sqrt{2}}\right)$$

Haciendo operaciones para simplificar:

$$7(y - x - 1)^2 = 9(y + x - 3)$$

Desarrollando:

$$7y^2 + 7x^2 + 7 - 14xy - 14y + 14x = 9y + 9x - 27$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\mathbf{7x^2 - 14xy + 7y^2 + 5x - 23y + 34 = 0}$$

Que es la ecuación expresada en su ***forma general***.

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Nombre de archivo:	parabola	
Directorio:	C:\Geometria_analitica	
Plantilla:	C:\WINDOWS\Application Data\Microsoft\Plantillas\Normal.dot	
Título:	V	
Asunto:		
Autor:	Pablo Fuentes Ramos	
Palabras clave:		
Comentarios:		
Fecha de creación:	04/03/02 01:12 P.M.	
Cambio número:	51	
Guardado el:	29/05/02 06:04 P.M.	
Guardado por:	Pablo Fuentes Ramos	
Tiempo de edición:	2,343 minutos	
Impreso el:	29/05/02 06:05 P.M.	
Última impresión completa		
	Número de páginas:	23
	Número de palabras:	3,237 (aprox.)
	Número de caracteres:	18,453 (aprox.)