

# Geometría

## B

### B.1 Parábolas, elipses e hipérbolas

Además de las curvas asociadas a líneas rectas, funciones trigonométricas o a cualquier otra función elemental, hay tres curvas que tienen una destacada importancia: las *secciones cónicas*. Los griegos ya conocían que el corte de un cono por un plano producía sólo tres tipos de curvas: parábolas, elipses e hipérbolas. Vamos a comentarlas con más detalle.

#### B.1.1 Parábola

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax^2 + bx + c\}$$

Una parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto dado, llamado *foco*, y de una recta llamada *directriz*. La recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco se llama *eje* de la parábola. La intersección del eje y de la directriz se llama *vértice*.

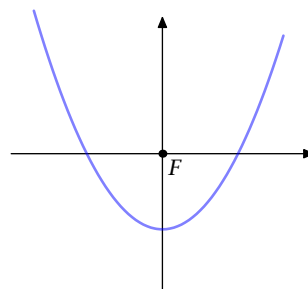


Ilustración B.1 Parábola

#### B.1.2 Elipse

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Una elipse es el conjunto de puntos verificando que la suma de las distancias a dos puntos fijos ( $F$  y  $F'$ ), llamados *focos*, es una constante mayor que la distancia entre los focos. El punto medio del segmento que une los focos se llama *centro*. El segmento que pasa por los dos focos y acaba en la elipse se llama *eje mayor*. El segmento perpendicular al eje mayor y que acaba en la elipse es el *eje menor*. Las intersecciones de los ejes con la elipse se llaman *vértices* de la elipse. Los focos son los puntos  $(c, 0)$  y  $(-c, 0)$  que verifican  $a^2 = b^2 + c^2$ . El caso particular  $a = b$  es conocido: la *circunferencia*.

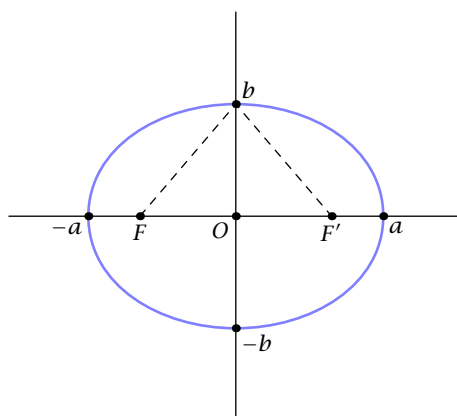


Ilustración B.2 Elipse

Las ecuaciones que hemos escrito describen elipses o circunferencias centradas en el origen de coordenadas. Si el centro está en el punto  $(h, k)$  la ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Es inmediato comprobar que la circunferencia de radio  $r$  centrado en el punto  $(h, k)$  es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

### B.1.3 Hipérbola

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Una hipérbola es el conjunto de puntos que verifican que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es una constante positiva menor que la distancia entre los focos ( $F$  y  $F'$ ).

## B.2 Superficies cuadráticas

a) **Esfera:**  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

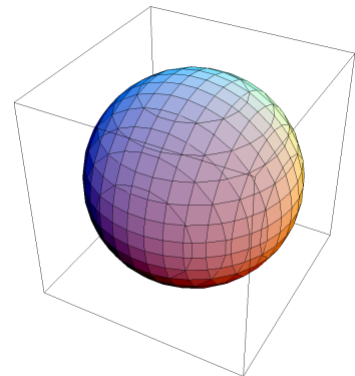
Secciones paralelas al plano  $xy$ : circunferencias.

Secciones paralelas al plano  $xz$ : circunferencias.

Secciones paralelas al plano  $yz$ : circunferencias.

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Área} = 4\pi R^2$$

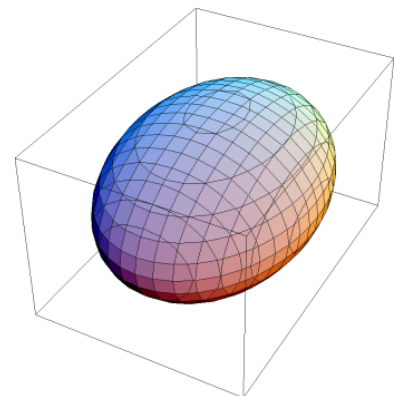


b) **Elipsoide:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Secciones paralelas al plano  $xy$ : Elipses.

Secciones paralelas al plano  $xz$ : Elipses.

Secciones paralelas al plano  $yz$ : Elipses.



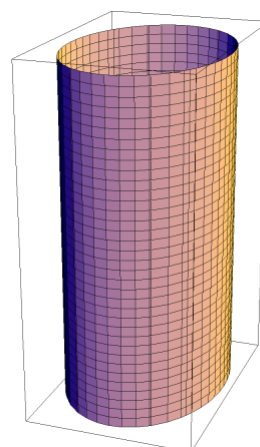
c) **Cilindro elíptico:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Secciones paralelas al plano  $xy$ : elipses.

Secciones paralelas al plano  $xz$ : rectas.

Secciones paralelas al plano  $yz$ : rectas.

Volumen =  $\pi ab \times \text{altura}$

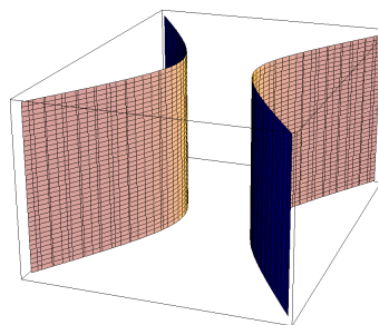


d) **Cilindro hiperbólico:**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Secciones paralelas al plano  $xy$ : hipérbolas.

Secciones paralelas al plano  $xz$ : rectas.

Secciones paralelas al plano  $yz$ : rectas.

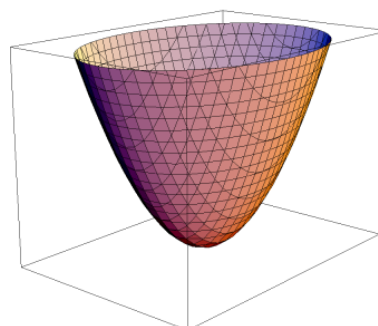


e) **Paraboloide elíptico:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

Secciones paralelas al plano  $xy$ : Elipses.

Secciones paralelas al plano  $xz$ : Parábolas.

Secciones paralelas al plano  $yz$ : Parábolas.

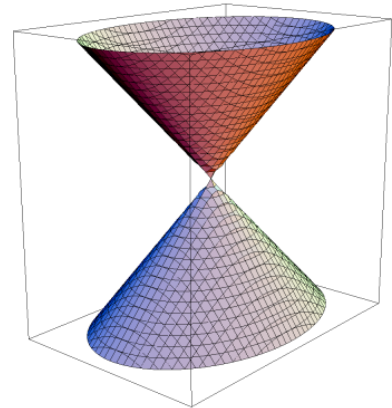


f) **Cono elíptico:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Secciones paralelas al plano  $xy$ : Elipses.

Secciones paralelas al plano  $xz$ : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano  $yz$ : Hipérbolas.

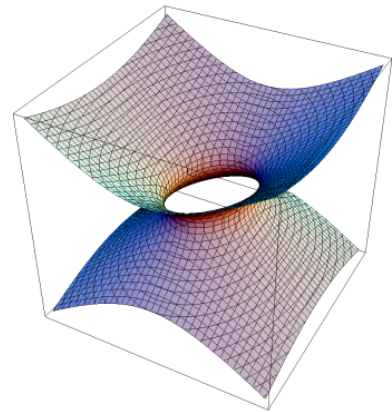


g) **Hiperboloide elíptico de una hoja:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Secciones paralelas al plano  $xy$ : Elipses.

Secciones paralelas al plano  $xz$ : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano  $yz$ : Hipérbolas.

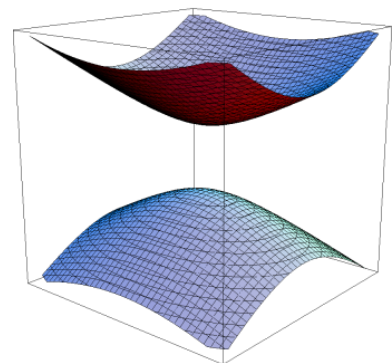


h) **Hiperboloide elíptico de dos hojas:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

Secciones paralelas al plano  $xy$ : Elipses.

Secciones paralelas al plano  $xz$ : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano  $yz$ : Hipérbolas.



i) **Paraboloide hiperbólico:**  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = z$

Secciones paralelas al plano  $xy$ : Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano  $xz$ : Parábolas.

Secciones paralelas al plano  $yz$ : Parábolas.

