Funciones polinomiales de grados cero, uno y dos

A una función *p* se le llama **polinomio** si:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_{1x} + a_0$$

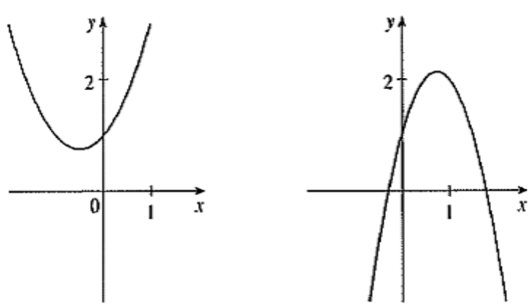
Donde un entero no negativo y los números $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ son constantes se conocen como coeficientes del polinomio. El dominio de cualquier polinomio es $R = (-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el grado del polinomio es *n*.

Por ejemplo la función:

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \sqrt{2}$$

Es un polinomio de grado 6.

Un polinomio de grado 1 tiene la forma $P(x) = mx + b$ y de este modo es una función lineal. Polinomio de grado 2 tiene la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ se le llama **función cuadrática**. Su gráfica es siempre una parábola que se obtiene, al cambiar la parábola $y = ax^2$. La parábola se abre hacia arriba si *a > 0* y hacia abajo si *a < 0*.



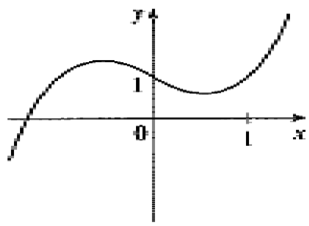
(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

Un polinomio de grado 3 tiene la forma:

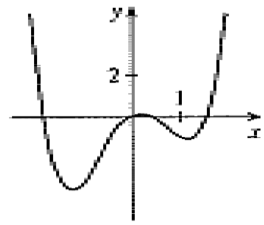
$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a \neq 0$$

Y se le da el nombre de **función cúbica**. En la siguiente figura se muestra la gráfica de una función cúbica en la parte (a) y gráfica de polinomios de grados 4 y

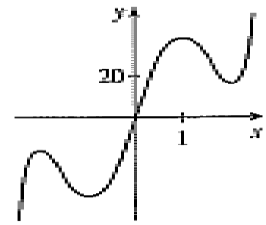
5 en las partes (b) y (c). Más adelante se verá por qué las gráficas tienen las formas que se ilustran en este momento.



(a) $y = x^3 - x + 1$



(b) $y = x^4 - 3x^2 + x$

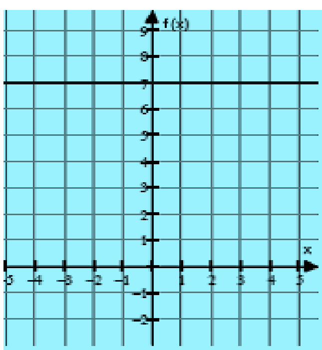


(c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

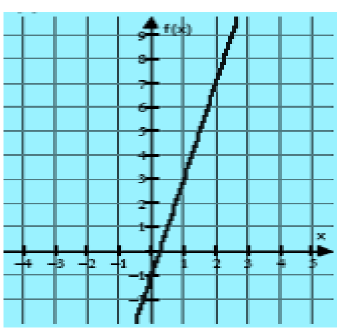
Características de las funciones polinomiales

El grado de un polinomio está dado por el mayor exponente de la variable en el polinomio, independientemente del orden en el que estén los términos, como se muestra en las siguientes funciones:

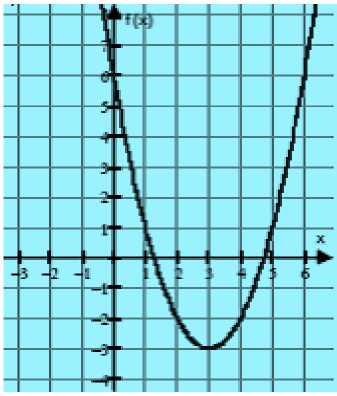
1. $f(x) = 7$. Es de grado cero, se le conoce como **función constante**.



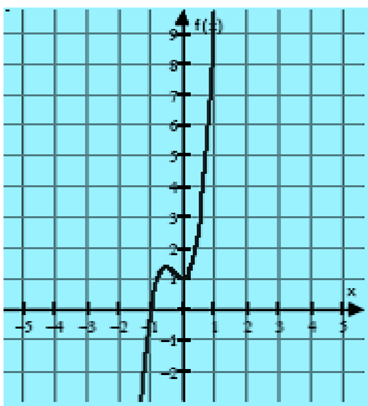
2. $f(x) = 4x - 1$. Es de grado uno, también conocida como **función lineal**.



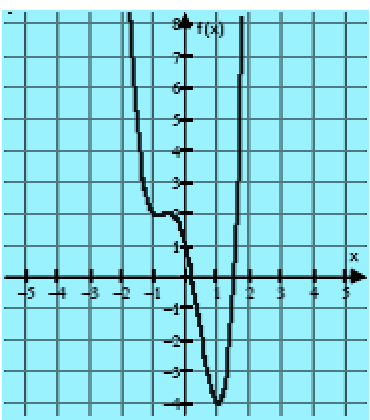
3. $f(x) = x^2 + 5x + 6$. Es de grado dos, se le conoce como **función cuadrática**.



4. $f(x) = 4x^2 + 5x^3 + 1$. Es de grado tres y se le conoce como **función cúbica**.



5. $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1$. Es de grado cuatro y se le conoce como **función cuartica**.



El dominio de una función Polinomial es el conjunto de los números reales, sin embargo, el rango en algunos casos no lo es; para entender esto, se requiere analizar las funciones hasta encontrar la generalidad, por ejemplo: en la función de grado cero (función constante), el rango es el conjunto que tiene como único elemento la misma constante por la cual está definida; la función de grado uno (función lineal) y la función de grado tres (función cúbica) tienen como rango el conjunto de los números reales; la función grado dos (función cuadrática) y la función de grado cuatro (función cuartica) tienen como rangos una parte de los números reales, a esa parte se le conoce como subconjunto.
Si una función es impar (grado impar) el rango de la función es el conjunto de los números reales; si una función es par (grado par), el rango de la función es un subconjunto de los números reales.

Influencia de los parámetros de funciones de grado cero, uno y dos en su representación gráfica

La función constante. La función de grado cero es la que se conoce como función constante, ésta es un caso particular de la función Polinomial y se inició con ella en el primer bloque; su forma es:

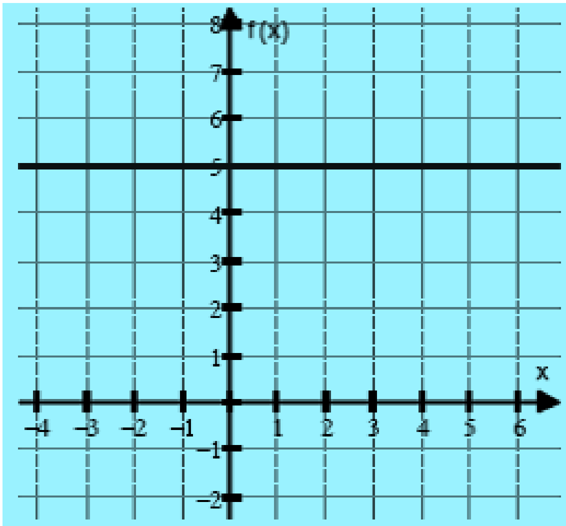
$f(x) = a$, donde "*a*" es una constante

Su gráfica es una recta paralela al eje X y corta al eje Y en el punto (0, a).

<u>Ejemplo 1</u>

Graficar la función $f(x) = 5$, determinar su dominio y rango.

La función también se puede expresar como $y = 5$, por lo tanto su gráfica es una recta horizontal a la altura de 5, como se muestra en la siguiente figura.



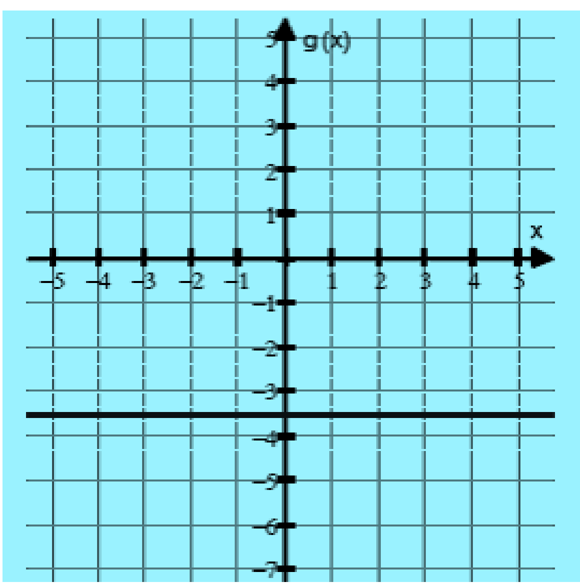
Dominio $(-\infty, \infty)$, se debe recordar que el dominio de un polinomio siempre será $R = (-\infty, \infty)$

Rango $\{5\}$

Ejemplo 2.

Graficar la función $g(x) = -\frac{7}{2}$, determinar su domino y rango

La función constante puede ser cualquier número real, en este caso es un número racional, el cual equivale $y = -3.5$, en la figura siguiente se muestra el resultado de la función.



Dominio $(-\infty, \infty)$

Rango $\{\frac{7}{2}\}$

Funciones polinomiales de grado uno y las particularidades de los modelos lineales y cuadráticos

La función lineal. La ecuación lineal en su forma pendiente-ordenada en el origen es:

$$y = mx + b$$

Donde *m* es la pendiente de la recta y *b* es la ordenada del origen.

Vista como una función se representa de la siguiente manera:

$$f(x) = mx + b$$

Dónde:

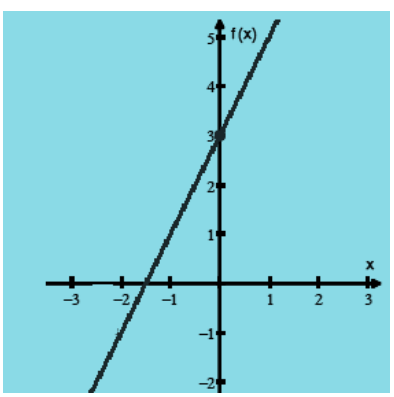
$b.$ Es la constante que indica el lugar donde la recta cruza el eje *y*, además se le denomina **término independiente.**

$m.$ Es la pendiente de la recta, la cual está relacionada con su inclinación, es el coeficiente de la variable.

$x.$ Es la variable independiente.

En la siguiente figura se muestra la función de los parámetros antes mencionados.

Ejemplo: $f(x) = 2x + 3$



Dónde:

$$m = 2$$

$$b = 3$$

Existen métodos para graficar funciones lineales:

6. Sustitución de valores.
7. Intersección con los ejes coordenados.
8. Parámetros (m y b).

Cuando se tiene la regla de correspondencia de una función lineal es sencillo trazar la gráfica, ubicando primero el punto que describe la ordenada en el origen y a partir de él, mediante la pendiente, se ubica el segundo punto.

<u>Ejemplo 1</u>

Graficar la función $f(x) = \frac{4}{3}x - 1$

Solución. Cuando se observa la función la pendiente es:

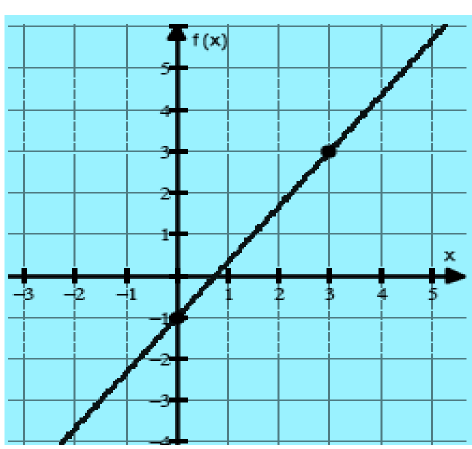
$$m = \frac{4}{3}$$

Y la ordena del origen es:

$$b = -1$$

La cual proporciona la intersección con el eje Y.

Como la pendiente es $m = \frac{4}{3}$, a partir del punto se desplaza 3 unidades a la derecha y 4 unidades hacia arriba, ya que en el cociente de la pendiente, el numerado es el incremento vertical y el denominador es el incremento horizontal.



Los parámetros dicen mucho del comportamiento gráfico de la función, como es el caso de la pendiente, cuando es mayor que cero y menor que uno, su ángulo de inclinación es mayor que 0 y menor que 45º; cuando es mayor que uno su ángulo de inclinación es mayor que 45º y menor que 90º; en el caso de tener pendiente negativa, el ángulo de inclinación es mayor de 90º y menor que 180º.

La función cuadrática. Las funciones cuadráticas se caracterizan por su grado 2, éstas se expresan en su forma general como $f(x) = ax^2 + bx + c$, con la condición de que su coeficiente principal es diferente de cero $(a \neq 0)$ se compone de la siguiente manera:

ax^2. Término cuadrático.
bx. Término lineal.
c. Termino independiente.

Al igual que la ecuación cuadrática, la función cuadrática tiene la misma clasificación.
La clasificación de las ecuaciones cuadráticas depende de los términos que aparezcan en ellas.

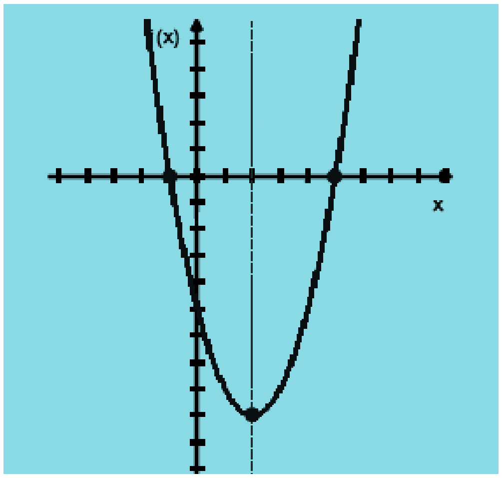
Se les llama **completas** cuando poseen todos los términos, e incompletas cuando carecen de alguno. Si no tiene el término lineal se denominan **puras**, y si no aparece el término independiente se conocen como **mixtas**.

En el siguiente cuadro sinóptico visualizarás su estructura.

Clasificación de las Funciones cuadráticas

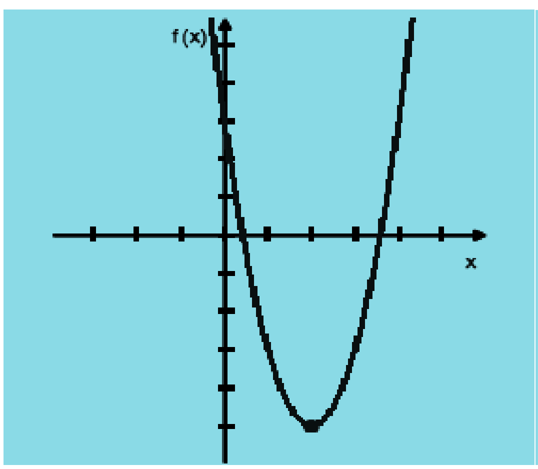
- Funciones Completas: $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Funciones Incompletas
  - Funciones Puras: $f(x) = ax^2 + c$
  - Funciones Mixtas: $f(x) = ax^2 + bx$

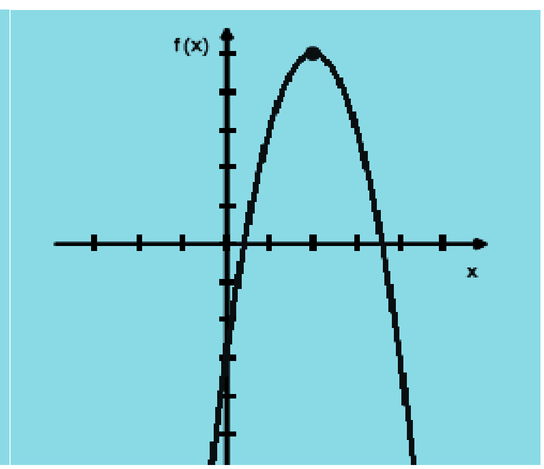
Las gráficas de las funciones cuadráticas describen parábolas, como se muestra en la siguiente figura.



Cuando la función se iguala a cero, se produce una ecuación y los valores que la satisfacen se llaman **raíces** de la función.

Dependiendo del tipo de parábola (con ramas hacia abajo o ramas hacia arriba), el vértice es el punto mínimo o punto máximo, como se muestra en la siguientes figuras.





Para observar cómo intervienen los parámetros en los cambios que sufre la gráfica, se tiene que reescribir la forma general de la función cuadrática a la forma estándar, la cual explicita el vértice y la abertura que tiene la parábola que describe.

Forma general de la función cuadrática. $f(x) = ax^2 + bx + c$
Forma estándar de la función cuadrática. $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Dónde:

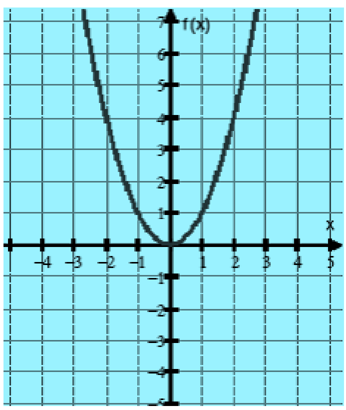
h Y k. Son las coordenadas del vértice.

<u>Ejemplo:</u>

comparar las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3(x-2)^2 - 4$

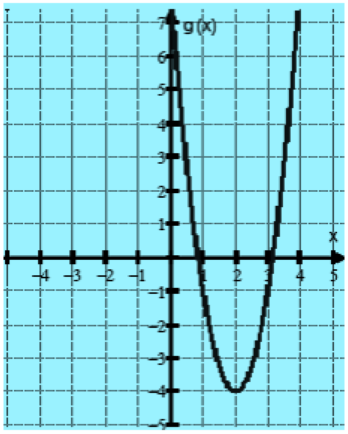
Solución. Al tomar los valores quedan de la siguiente manera.
a) $f(x) = x^2$.

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



b) $g(x) = 3(x-2)^2 - 4$.

x	$f(x)$
0	8
1	-1
2	-4
3	-1
4	8



Si la función se describe en forma estándar entonces se obtendrá:

$$f(x) = 1(x - 0)^2 + 0$$

Al compararse con la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, se define lo siguiente:
$a = 1.$
$h = 0.$
$k = 0.$

El coeficiente principal que es *a*, es el que determina la abertura de la parábola si se considera una unidad a la derecha y una a la izquierda, los puntos correspondientes están una unidad hacia arriba.
Si se realiza el mismo análisis para la función $g(x)$, los parámetros se mostraran de la siguiente manera:

$$g(x) = 3(x - 2)^2 - 4$$

Dónde:

$a = 3.$
$h = 2.$
$k = 4.$